

روش های عددی در الکترومغناطیس

مدرس: سید محمد مهدی میرطلائی

1



سر فصل درس

❖ مقدمه

❖ روش تفاضل محدود (FDM)

❖ روش اجزای محدود (FEM)

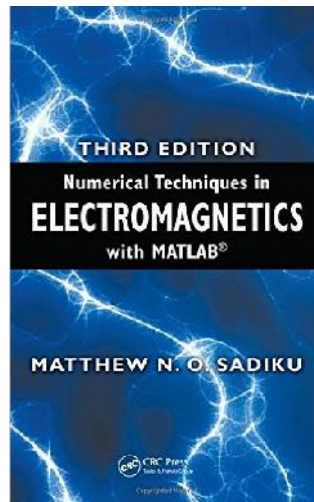
❖ روش ممان (MOM)

2



مراجع

1. Numerical Techniques in Electromagnetics - Sadiku

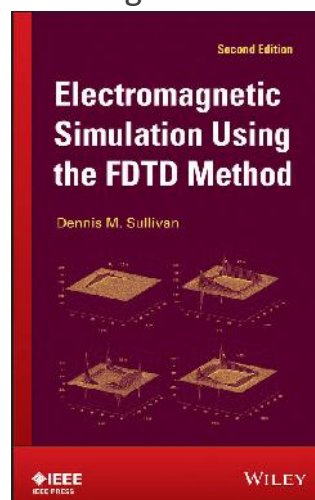


3



مراجع

2. Electromagnetic Simulation using the FDTD Method – Sullivan

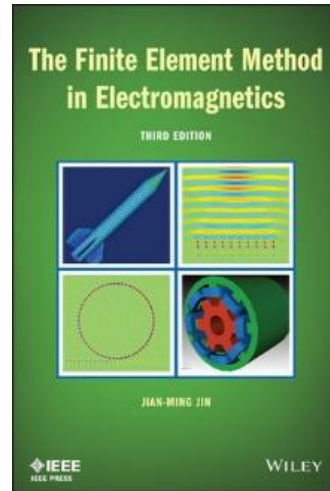


4



مراجع

3. The Finite Element Method in Electromagnetics- Jian-Ming Jin

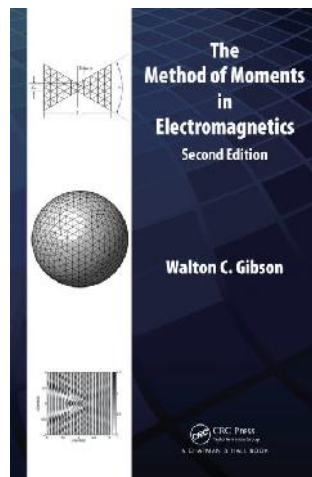


5



مراجع

4. The Method of Moments in Electromagnetics, Walton C. Gibson



6



ارزشیابی

❖ امتحان میان ترم: ۶ نمره

❖ امتحان پایان ترم: ۱۰ نمره

❖ تکالیف و شبیه سازی: ۴ نمره

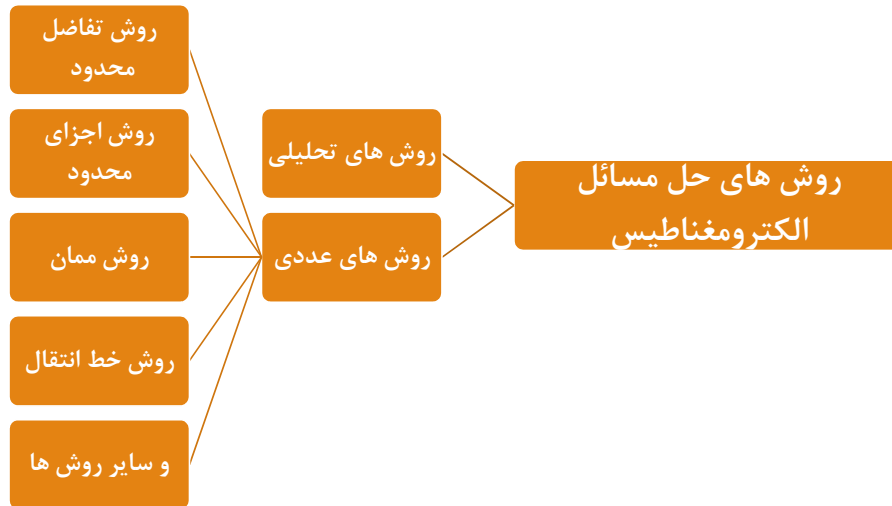
7

فصل اول: مقدمه

8



مقدمه



9



مروری بر تئوری الکترومغناطیس

۱- میدان های الکترواستاتیک:

❖ قانون گوس:

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int \rho_v dv$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

$\mathbf{D}$ = the electric flux density (in coulombs/meter²)

ρ_v = the volume charge density (in coulombs/meter³)

$\mathbf{E}$ = the electric field intensity (in volts/meter)

10



مروری بر تئوری الکترومغناطیس

❖ بیان معادلات به فرم مشتق

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

❖ رابطه بین چگالی شار الکتریکی و شدت میدان الکتریکی

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

$$V = - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

❖ تعریف پتانسیل الکتریکی

$$\nabla^2 V = - \frac{\rho_v}{\epsilon}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

$$\nabla \cdot \epsilon \nabla V = -\rho_v$$

11



مروری بر تئوری الکترومغناطیس

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v \xrightarrow[\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}]{\mathbf{E} = -\nabla V} \nabla \cdot \epsilon \nabla V = -\rho_v \xrightarrow{\text{if } \epsilon \text{ is constant}} \nabla^2 V = - \frac{\rho_v}{\epsilon}$$

معادله پواسون

$$\text{When } \rho_v = 0 \longrightarrow \nabla^2 V = 0$$

معادله لاپلاس

12



مروری بر تئوری الکترومغناطیس

۲- میدان های مگنتواستاتیک:

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J}_e \cdot d\mathbf{S}$$

قانون آمپر:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$\mathbf{H}$ = the magnetic field intensity (in amperes/meter)

$\mathbf{J}_e$ = the electric current density (in amperes/meter²)

$\mathbf{B}$ = the magnetic flux density (in tesla or webers/meter²)

13



مروری بر تئوری الکترومغناطیس

❖ بیان معادلات به فرم مشتق

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_e$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

❖ رابطه بین چگالی شار مغناطیسی و شدت میدان مغناطیسی

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

❖ رابطه بین شدت میدان الکتریکی و چگالی جریان الکتریکی

$$\mathbf{J}_e = \sigma \mathbf{E}$$

14



مروری بر تئوری الکترومغناطیس

❖ بیان چگالی شار بر حسب پتانسیل مغناطیسی برداری:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_e$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}_e$$

معادله پواسون

معادله لاپلاس

$$\text{When } \mathbf{J}_e = 0 \longrightarrow \nabla^2 \mathbf{A} = 0$$

15



مروری بر تئوری الکترومغناطیس

۳- میدان های متغیر با زمان

فرم مشتقی
معادلات

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{J}_m$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_e + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \rho_v dv$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{J}_m \right) \cdot d\mathbf{S}$$

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J}_e + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}$$

فرم انتگرالی
معادلات

$\mathbf{J}_m = \sigma^* \mathbf{H}$ is the magnetic conductive current density (in volts/square meter)

σ^* = the magnetic resistivity (in ohms/meter)

16



مروری بر تئوری الکترومغناطیس

❖ اثر محیط بر کمیت ها

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

$$\mathbf{J}_e = \sigma \mathbf{E}$$

$$\mathbf{J}_m = \sigma^* \mathbf{M}$$

❖ قانون نیروی لورنتس

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

❖ ارتباط چگالی جریان و تغییرات بار:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

17



مروری بر تئوری الکترومغناطیس

۴- شرایط مرزی:

محیطی که موج در آن قرار دارد میتواند ویژگی های زیر را داشته باشد:

❖ اگر $\sigma, \epsilon, \text{ and } \mu$ مستقل از $\mathbf{E}$ and $\mathbf{H}$ باشند، محیط خطی است در غیر این صورت محیط غیر خطی است.

❖ اگر $\sigma, \epsilon, \text{ and } \mu$ مستقل از متغیرهای مکانی باشد همگن در غیر این صورت ناهمگن است.

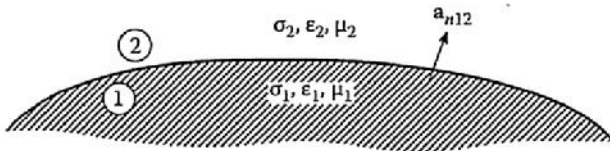
❖ اگر $\sigma, \epsilon, \text{ and } \mu$ مستقل از جهت باشد محیط ایزوتروپیک و در غیر این صورت غیر ایزوتروپیک است

18



مروری بر تئوری الکترومغناطیس

شرایط در مرز دو ماده:



$$\begin{aligned} E_{1t} &= E_{2t} \text{ or } (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \times \mathbf{a}_{n12} = 0 \\ H_{1t} - H_{2t} &= K \text{ or } (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \times \mathbf{a}_{n12} = \mathbf{K} \\ D_{1n} - D_{2n} &= \rho_s \text{ or } (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \mathbf{a}_{n12} = \rho_s \\ B_{1n} - B_{2n} &= 0 \text{ or } (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \cdot \mathbf{a}_{n12} = 0 \end{aligned}$$

where $\mathbf{a}_{n12}$ is a unit normal vector directed from medium 1 to medium 2.

surface current density $\mathbf{K}$

surface charge density ρ_s

19



مروری بر تئوری الکترومغناطیس

۵- معادله موج (معادلات ماکسول متغیر با زمان):

در معادلات ماکسول میدان های الکتریکی و مغناطیسی با یکدیگر کوپل شده اند. میتوان با تبدیل به معادلات موج این کوپلینگ را حذف نمود.

با فرض اینکه محیط خطی، ایزوتروپیک، همگن و فاقد منبع باشد:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} &= -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \longrightarrow \left. \begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} &= -\mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{F} &= \nabla (\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F} \end{aligned} \right\} \longrightarrow \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Since $\rho_v = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \longrightarrow \nabla^2 \mathbf{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$ معادله هلمهولتز

20



مروری بر تئوری الکترومغناطیس

به طور مشابه معادله هلمهولتز برای میدان مغناطیسی به صورت زیر است:

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0$$

معادلات هلمهولتز معادله حرکت موج در یک محیط را نشان می دهد. سرعت انتشار این موج به صورت زیر است:

$$u = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

where $u = c \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ in free space

21



مروری بر تئوری الکترومغناطیس

معادلات هلمهولتز به فرم برداری هستند که در مجموع شامل شش مولفه اسکالر زیر میباشند:

$$E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, \text{ and } H_z$$

هر کدام از این مولفه ها به صورت زیر در معادله هلمهولتز صدق میکند:

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

22



مروری بر تئوری الکترومغناطیس

۶- پتانسیل های متغیر با زمان:

برای پتانسیل های الکتریکی و مغناطیسی میتوان نشان داد:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J}$$

$$\nabla^2 V - \mu\epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho_v}{\epsilon}$$

$$\mathbf{A} = \int \frac{\mu[\mathbf{J}] dv}{4\pi R}$$

$$V = \int \frac{[\rho_v] dv}{4\pi\epsilon R}$$

where R is the distance

فرم مشتقی

فرم انتگرالی

where R is the distance from the source point to the field point

denote ρ and $\mathbf{J}$ is

23



دسته بندی مسائل الکترومغناطیس

مسائل الکترومغناطیس بر اساس یکی ویژگی های زیر دسته بندی میشوند:

۱- ناحیه ای که مسئله در آن حل میشود.

۲- نوع معادله توصیف کننده مسئله

۳- شرایط مرزی اختصاص یافته به مسئله

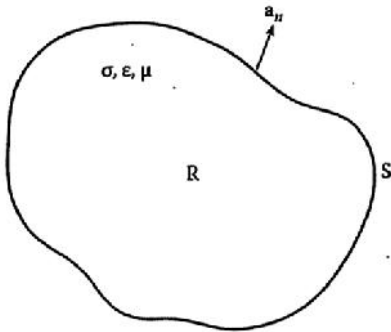
24



دسته بندی مسائل الکترومغناطیس

۱- دسته بندی بر اساس نواحی حل مسئله:

❖ نواحی با مرز محدود



❖ نواحی با مرز نا محدود

25



دسته بندی مسائل الکترومغناطیس

۲- دسته بندی بر اساس نوع معادله توصیف کننده مسئله:

❖ معادله دیفرانسیل

❖ معادله انتگرال

❖ ترکیب معادله دیفرانسیل و انتگرال

در حالت کلی:

$$L\Phi = g$$

where L is an operator (differential, integral, or integro-differential)

g is the known excitation or source

Φ is the unknown function to be determined

26



دسته بندی مسائل الکترومغناطیس

مثال: معادله پواسن الکتریکی

$$-\nabla^2 V = \frac{\rho_v}{\epsilon}$$

در این مثال:

$$L = -\nabla^2$$

$$g = \rho_v / \epsilon$$

$$\Phi = V$$

برای حل اغلب مسائل از فرم مشتق استفاده میکنیم.

27



دسته بندی مسائل الکترومغناطیس

در حالت کلی یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم به صورت زیر است:

$$a \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + d \frac{\partial \Phi}{\partial x} + e \frac{\partial \Phi}{\partial y} + f \Phi = g$$

که به صورت ساده زیر میتوان نشان داد:

$$\underline{a \Phi_{xx} + b \Phi_{xy} + c \Phi_{yy} + d \Phi_x + e \Phi_y + f \Phi = g}$$

در این رابطه:

$$L = a \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2}{\partial y^2} + d \frac{\partial}{\partial x} + e \frac{\partial}{\partial y} + f$$

28



دسته بندی مسائل الکترومغناطیس

هر معادله مشتق جزئی مرتبه دوم خطی سه حالت زیر را دارد:

$$\begin{aligned} \text{elliptic if } & b^2 - 4ac < 0 \\ \text{hyperbolic if } & b^2 - 4ac > 0 \\ \text{parabolic if } & b^2 - 4ac = 0 \end{aligned}$$

❖ بیضوی

❖ هذلولی

❖ سهموی

29



دسته بندی مسائل الکترومغناطیس

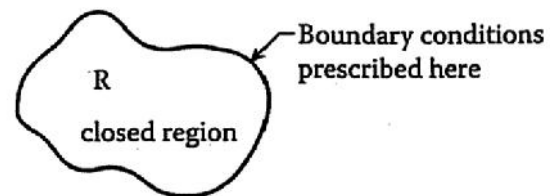
معادله مشتق جزئی مرتبه دوم بیضوی

این معادله معمولاً در شرایط حالت دائم برقرار است مانند معادله لاپلاس و پواسن

Laplace's equation $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$

Poisson's equation $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = g(x, y)$

$$a = c = 1, b = 0$$



معمولاً این معادلات در ناحیه با مرز محدود تعریف میشود.

30



دسته بندی مسائل الکترومغناطیس

معادله مشتق جزئی مرتبه دوم هذلولی

این معادله معمولاً در مسائل انتشار امواج ظاهر میشود:

مثال: معادله موج یک بعدی

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$$

$$a = u^2, b = 0, c = -1$$

معمولاً این معادلات در ناحیه باز بر اساس شرایط اولیه حل میشوند و شرایط مرزی تعیین شده ای را ارضا میکنند.

31



دسته بندی مسائل الکترومغناطیس

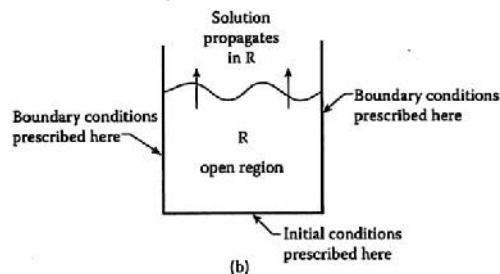
معادله مشتق جزئی مرتبه دوم سهموی

این معادله در مسائل حرارتی ظاهر میشود:

مثال: معادله انتقال حرارت:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = k \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

$$a = 1, b = 0, c = 0$$



این معادلات مانند معادلات هذلولی

در فضای باز حل میشوند:

32



دسته بندی مسائل الکترومغناطیس

جمع بندی

Table 1.1 Classification of Partial Differential Equations

Type	Sign of $b^2 - 4ac$	Example	Solution Region
Elliptic	—	Laplace's equation: $\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0$	Closed
Hyperbolic	+	Wave equation: $u^2 \Phi_{xx} = \Phi_{tt}$	Open
Parabolic	0	Diffusion equation: $\Phi_{xx} = k \Phi_t$	Open

33



دسته بندی مسائل الکترومغناطیس

۳- دسته بندی بر اساس شرایط مرزی

پاسخ معادله دیفرانسل نه تنها باید در خود معادله صدق کند بلکه باید شرایط مرزی ناحیه حل را ارضا کند.

سه نوع شرایط مرزی متداول وجود دارد:

۱- شرط مرزی دیریکله

۲- شرط مرزی نیومن

۳- شرط مرزی ترکیبی

34



دسته بندی مسائل الکترومغناطیس

۱- شرط مرزی دیریکله:

$$\Phi(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \text{ on } S$$

۲- شرط مرزی نیومن:

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{r})}{\partial n} = 0, \quad \mathbf{r} \text{ on } S,$$

the normal derivative of Φ vanishes on S .

35



دسته بندی مسائل الکترومغناطیس

۳- شرایط مرزی ترکیبی:

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{r})}{\partial n} + h(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \text{ on } S,$$

where $h(\mathbf{r})$ is a known function

$\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ is the directional derivative of Φ along the outward normal to the boundary S

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \nabla \Phi \cdot \mathbf{a}_n$$

where $\mathbf{a}_n$ is a unit normal directed out of R

36



دسته بندی مسائل الکترومغناطیس

نکته ۱: شرط مرزی نیومن حالت خاص شرط مرزی ترکیبی است زمانی که:

$$h(\mathbf{r}) = 0$$

نکته ۲- شروط فوق را اصطلاحاً همگن میگویند زیرا سمت راست تساوی صفر است. در حالت ناهمگن به صورت زیر تعریف میشوند:

$$\Phi(\mathbf{r}) = p(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \text{ on } S$$

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{r})}{\partial n} = q(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \text{ on } S$$

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{r})}{\partial n} + h(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) = w(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \text{ on } S$$

where $p(\mathbf{r})$, $q(\mathbf{r})$, and $w(\mathbf{r})$ are explicitly known functions on the boundary S .

37



دسته بندی مسائل الکترومغناطیس

مثال:

$\Phi(0) = 1$ is an inhomogeneous Dirichlet boundary condition

$\Phi'(1) = 2$ inhomogeneous Neumann boundary conditions

مثال در الکترواستاتیک:

if the value of electric potential is specified on S → Dirichlet boundary condition

if the surface charge ($\rho_s = D_n = \epsilon \frac{\partial V}{\partial n}$) is specified → Neumann boundary conditions

38

فصل دوم: روش تفاضل محدود

39



مقدمه

❖ این روش اولین بار در سال ۱۹۲۰ برای حل مسائل هیدرودینامیک معرفی گردید.

❖ این روش حل از سه گام تشکیل شده است:

❖ تقسیم ناحیه حل به شبکه ای از نقاط



(a)



(b)



(c)



(d)

40



❖ تقریب معادلات دیفرانسیل با معادلات تفاضلی

❖ حل معادلات تفاضلی با استفاده از شرایط اولیه و شرایط مرزی

41



الگوهای تفاضل محدود

تعریف مشتق مرتبه اول:

forward-difference formula

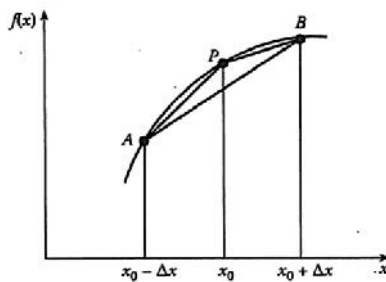
$$f'(x_0) \simeq \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

backward-difference formula

$$f'(x_0) \simeq \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x}$$

central-difference formula

$$f'(x_0) \simeq \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x}$$



42



الگوهای تفاضل محدود

تعریف مشتق مرتبه دوم:

$$f''(x_0) \simeq \frac{f'(x_0 + \Delta x/2) - f'(x_0 - \Delta x/2)}{\Delta x}$$

$$= \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} \right]$$
$$f''(x_0) \simeq \frac{f(x_0 + \Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta x)}{(\Delta x)^2}$$

43



الگوهای تفاضل محدود

محاسبه مشتق بر اساس بسط سری تیلور

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta x f'(x_0) + \frac{1}{2!}(\Delta x)^2 f''(x_0) + \frac{1}{3!}(\Delta x)^3 f'''(x_0) + \dots$$

$$f(x_0 - \Delta x) = f(x_0) - \Delta x f'(x_0) + \frac{1}{2!}(\Delta x)^2 f''(x_0) - \frac{1}{3!}(\Delta x)^3 f'''(x_0) + \dots$$

$$f(x_0 + \Delta x) + f(x_0 - \Delta x) = 2f(x_0) + (\Delta x)^2 f''(x_0) + O(\Delta x)^4$$

$O(\Delta x)^4$ is the error introduced by truncating the series.

44



الگوهای تفاضل محدود

فرمول محاسبه مشتق مرتبه دوم با خطای از مرتبه ۴

$$f''(x_0) \simeq \frac{f(x_0 + \Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta x)}{(\Delta x)^2}$$

فرمول محاسبه مشتق مرتبه اول با خطای از مرتبه ۳

$$f'(x_0) \simeq \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x}$$

45



الگوهای تفاضل محدود

مثال: اعمال روش تفاضل محدود به یک تابع $\Phi(x, t)$

$$x = i\Delta x, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

$$t = j\Delta t, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

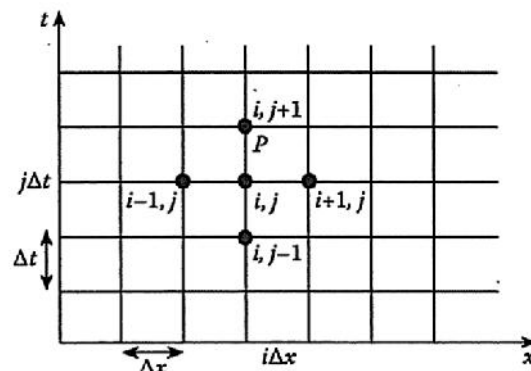
$$\Phi_P = \Phi(i\Delta x, j\Delta t) = \Phi(i, j)$$

$$\Phi_x|_{i,j} \simeq \frac{\Phi(i+1, j) - \Phi(i-1, j)}{2\Delta x},$$

$$\Phi_t|_{i,j} \simeq \frac{\Phi(i, j+1) - \Phi(i, j-1)}{2\Delta t},$$

$$\Phi_{xx}|_{i,j} \simeq \frac{\Phi(i+1, j) - 2\Phi(i, j) + \Phi(i-1, j)}{(\Delta x)^2},$$

$$\Phi_{tt}|_{i,j} \simeq \frac{\Phi(i, j+1) - 2\Phi(i, j) + \Phi(i, j-1)}{(\Delta t)^2}$$



46



الگوهای تفاضل محدود

Derivative	Finite Difference Approximation	Type	Error
Φ_x	$\frac{\Phi_{i+1} - \Phi_i}{\Delta x}$	FD	$O(\Delta x)$
	$\frac{\Phi_i - \Phi_{i-1}}{\Delta x}$	BD	$O(\Delta x)$
	$\frac{\Phi_{i+1} - \Phi_{i-1}}{2\Delta x}$	CD	$O(\Delta x)^2$
	$\frac{-\Phi_{i+2} + 4\Phi_{i+1} - 3\Phi_i}{2\Delta x}$	FD	$O(\Delta x)^2$
	$\frac{3\Phi_i - 4\Phi_{i-1} + \Phi_{i-2}}{2\Delta x}$	BD	$O(\Delta x)^2$
	$\frac{-\Phi_{i+2} + 8\Phi_{i+1} - 8\Phi_{i-1} + \Phi_{i-2}}{12\Delta x}$	CD	$O(\Delta x)^4$
Φ_{xx}	$\frac{\Phi_{i+2} - 2\Phi_{i+1} + \Phi_i}{(\Delta x)^2}$	FD	$O(\Delta x)^2$
	$\frac{\Phi_i - 2\Phi_{i-1} + \Phi_{i-2}}{(\Delta x)^2}$	BD	$O(\Delta x)^2$
	$\frac{\Phi_{i+1} - 2\Phi_i + \Phi_{i-1}}{(\Delta x)^2}$	CD	$O(\Delta x)^2$
	$\frac{-\Phi_{i+2} + 16\Phi_{i+1} - 30\Phi_i + 16\Phi_{i-1} - \Phi_{i-2}}{12(\Delta x)^2}$	CD	$O(\Delta x)^4$

where FD = Forward Difference, BD = Backward Difference, and CD = Central Difference.

47



اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل سهموی

معادله انتقال حرارت:

$$k \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$$

where k is a constant.

معادل تفاضل محدود این معادله:

$$k \frac{\Phi(i, j+1) - \Phi(i, j)}{\Delta t} = \frac{\Phi(i+1, j) - 2\Phi(i, j) + \Phi(i-1, j)}{(\Delta x)^2}$$

where $x = i\Delta x, i = 0, 1, 2, \dots, n, t = j\Delta t, j = 0, 1, 2, \dots$

48



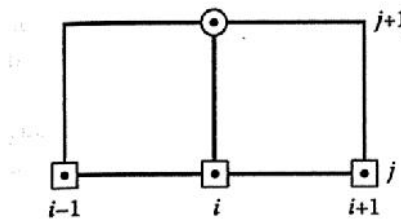
اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل سهموی

$$r = \frac{\Delta t}{k(\Delta x)^2}$$

با فرض:

$$\Phi(i, j+1) = r\Phi(i+1, j) + (1-2r)\Phi(i, j) + r\Phi(i-1, j)$$

با استفاده از این رابطه صریح مقدار متغیر Φ در لحظه $t = \Delta t$ بر اساس مقادیر اولیه مشخص میشود. بر این اساس سلول محاسباتی به صورت شکل زیر خواهد بود:



49



اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل سهموی

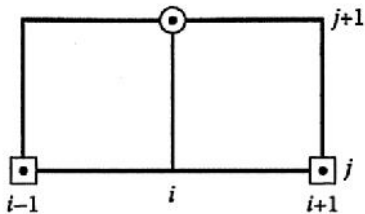
میتوان نشان داد که به منظور حفظ پایداری معادله فوق مقدار متغیر r باید در شرط زیر صدق کند:

$$0 < r \leq 1/2$$

با انتخاب $r=0.5$ معادله به صورت زیر تبدیل میشود:

$$\Phi(i, j+1) = \frac{1}{2}[\Phi(i+1, j) + \Phi(i-1, j)]$$

در نتیجه سلول محاسباتی به صورت زیر تبدیل میشود:



50



اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل سهموی

عیب روش فوق محدود پایداری در مقدار محدود r میباشد.

برای حل این مشکل میتوان معادله فوق را به صورت ضمنی زیر تغییر داد (استفاده از میانگین مشتق مرتبه دوم در نقطه j و $j+1$):

$$k \frac{\Phi(i, j+1) - \Phi(i, j)}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left[\frac{\Phi(i+1, j) - 2\Phi(i, j) + \Phi(i-1, j)}{(\Delta x)^2} + \frac{\Phi(i+1, j+1) - 2\Phi(i, j+1) + \Phi(i-1, j+1)}{(\Delta x)^2} \right]$$

با قرار دادن مقدار r :

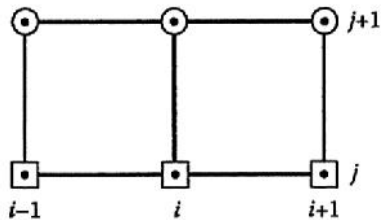
$$\begin{aligned} -r\Phi(i-1, j+1) + 2(1+r)\Phi(i, j+1) - r\Phi(i+1, j+1) \\ = r\Phi(i-1, j) + 2(1-r)\Phi(i, j) + r\Phi(i+1, j) \end{aligned}$$

51



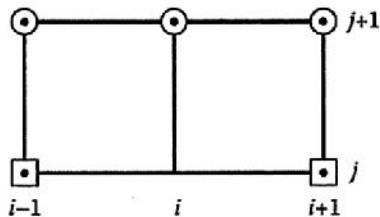
اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل سهموی

سلول محاسباتی در این حالت:



در این روش ناحیه تغییرات r از لحاظ پایداری کلیه اعداد مثبت است. اگر به طور خاص $r=1$ انتخاب شود:

$$-\Phi(i-1, j+1) + 4\Phi(i, j+1) - \Phi(i+1, j+1) = \Phi(i-1, j) + \Phi(i+1, j)$$



52



اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل سهموی

روش های پیاده سازی معادلات تفاضل محدود

Method	Algorithm	Molecule
1. First order (Euler)	$\frac{\Phi_i^{j+1} - \Phi_i^j}{\Delta t} = \frac{\Phi_{i+1}^j - 2\Phi_i^j + \Phi_{i-1}^j}{k(\Delta x)^2}$ explicit, stable for $r = \Delta t / k(\Delta x)^2 \leq 0.5$	
2. Crank–Nicholson	$\frac{\Phi_i^{j+1} - \Phi_i^j}{\Delta t} = \frac{\Phi_{i+1}^{j+1} - 2\Phi_i^{j+1} + \Phi_{i-1}^{j+1}}{2k(\Delta x)^2} + \frac{\Phi_{i+1}^j - 2\Phi_i^j + \Phi_{i-1}^j}{2k(\Delta x)^2}$ implicit, always stable	

53



اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل سهموی

	implicit, always stable	
3. Leapfrog	$\frac{\Phi_i^{j+1} - \Phi_i^{j-1}}{2\Delta t} = \frac{\Phi_{i+1}^j - 2\Phi_i^j + \Phi_{i-1}^j}{k(\Delta x)^2}$ explicit, always unstable	
4. Dufort–Frankel	$\frac{\Phi_i^{j+1} - \Phi_i^{j-1}}{2\Delta t} = \frac{\Phi_{i+1}^j - \Phi_i^{j+1} - \Phi_i^{j-1} + \Phi_{i-1}^j}{k(\Delta x)^2}$ explicit, unconditionally stable	

54



اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل سهموی

مثال: حل معادله حرارت

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

شرایط اولیه

$$\Phi(x, 0) = 100$$

شرایط مرزی

$$\Phi(0, t) = 0 = \Phi(1, t) = 0, \quad t > 0$$

توصیف فیزیکی مسئله: محاسبه توزیع دمایی در یک میله به طول یک متر که ابتدا به اندازه ۱۰۰ درجه گرم شده و در لحظه صفر دو انتهای آن داخل یخ صفر درجه قرار میگیرد.

55



اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل سهموی

حالت اول: حل به روش مستقیم

$$\Delta x = 0.1, r = 1/2 \longrightarrow \Delta t = kr(\Delta x)^2 = 0.005$$

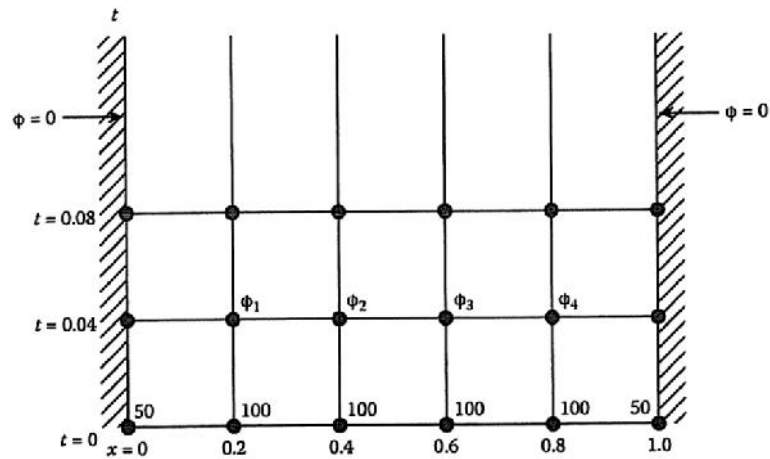
x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	...	1.0
t									
0	50	100	100	100	100	100	100		50
0.005	0	75.0	100	100	100	100	100		0
0.01	0	50	87.5	100	100	100	100		0
0.015	0	43.75	75	93.75	100	100	100		0
0.02	0	37.5	68.75	87.5	96.87	100	96.87		0
0.025	0	34.37	62.5	82.81	93.75	96.87	93.75		0
0.03	0	31.25	58.59	78.21	89.84	93.75	89.84		0
⋮									
0.1	0	14.66	27.92	38.39	45.18	47.44	45.18		0

56



اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل سهموی

حالت دوم: حل به روش غیر مستقیم $\Delta x = 0.2, r = 1 \rightarrow \Delta t = 0.04$



57



اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل سهموی

$t = 0.04.$

$$\begin{aligned} -0 + 4\Phi_1 - \Phi_2 &= 50 + 100 \\ -\Phi_1 + 4\Phi_2 + \Phi_3 &= 100 + 100 \\ -\Phi_2 + 4\Phi_3 - \Phi_4 &= 100 + 100 \\ -\Phi_3 + 4\Phi_4 - 0 &= 100 + 50 \end{aligned}$$

با حل این معادلات:

$$\Phi_1 = 58.13, \quad \Phi_2 = 82.54, \quad \Phi_3 = 72, \quad \Phi_4 = 55.5$$

58



اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل سهموی

$$t = 0.08$$

$$-0 + 4\Phi_1 - \Phi_2 = 0 + 82.54$$

$$-\Phi_1 + 4\Phi_2 - \Phi_3 = 58.13 + 72$$

$$-\Phi_2 + 4\Phi_3 - \Phi_4 = 82.54 + 55.5$$

$$-\Phi_3 + 4\Phi_4 - 0 = 72 + 0$$

با حل این معادلات:

$$\Phi_1 = 34.44, \quad \Phi_2 = 55.23, \quad \Phi_3 = 56.33, \quad \Phi_4 = 32.08$$

59



اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل سهموی

مقایسه روش تفاضل محدود با روش تحلیلی:

t	Finite Difference Solution at $x = 0.4$	Analytic Solution at $x = 0.4$	Percentage Error
0.005	100	99.99	0.01
0.01	100	99.53	0.47
0.015	100	97.85	2.2
0.02	96.87	95.18	1.8
0.025	93.75	91.91	2.0
0.03	89.84	88.32	1.7
0.035	85.94	84.61	1.6
0.04	82.03	80.88	1.4
$\vdots$			
0.10	45.18	45.13	0.11

60



اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل سهموی

تمرین سری اول: مثال فوق را به روش مستقیم غیر مستقیم در نرم افزار متلب پیاده سازی نمائید. در هر دو حالت فواصل نقاط را ۵ سانتیمتر در نظر بگیرید و تا زمان ۱ ثانیه شبیه سازی کنید.

61



اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل هذلولی

فرم کلی معادله (معادله موج):

$$u^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$$

where u is the speed of the wave.

حل معادله به روش مستقیم: تبدیل به فرم تفاضل محدود:

$$u^2 \frac{\Phi(i+1, j) - 2\Phi(i, j) + \Phi(i-1, j)}{(\Delta x)^2} = \frac{\Phi(i, j+1) - 2\Phi(i, j) + \Phi(i, j-1)}{(\Delta t)^2}$$

where $x = i \Delta x, t = j \Delta t, i, j = 0, 1, 2, \dots$

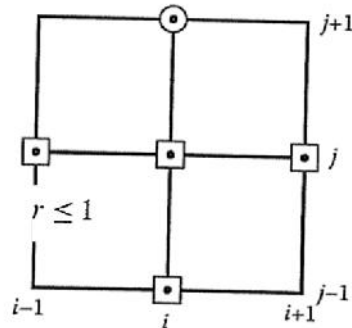
62



اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل هذلولی

$$r = \left(\frac{u \Delta t}{\Delta x} \right)^2$$

$$\Phi(i, j+1) = 2(1-r)\Phi(i, j) + r[\Phi(i+1, j) + \Phi(i-1, j)] - \Phi(i, j-1)$$



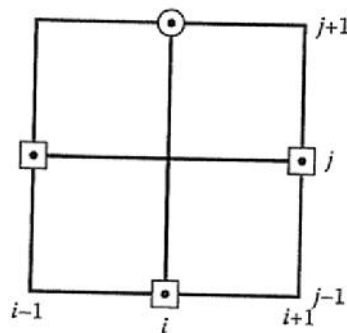
63



اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل هذلولی

If we choose $r = 1$.

$$\Phi(i, j+1) = \Phi(i+1, j) + \Phi(i-1, j) - \Phi(i, j-1)$$



64



اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل هذلولی

مشکل: در این معادله وابستگی مقدار تابع در لحظه $j+1$ به مقادیر j و $j-1$

راه حل: استفاده از شرایط اولیه برای تعیین مقادیر مراحل قبلی

مثال: فرض کنید شرایط اولیه این مسئله به صورت زیر باشد:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi(x, 0)}{\partial t} \simeq \frac{\Phi(i, 1) - \Phi(i, -1)}{2\Delta t} = 0$$

65



اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل هذلولی

با جایگذاری در معادله
تفاضل محدود

$$\Phi(i, 1) = \Phi(i, -1) \longrightarrow \Phi(i, 1) = 2(1-r)\Phi(i, 0) + r[\Phi(i-1, 0) + \Phi(i+1, 0)] - \Phi(i, 1)$$

$$\Phi(i, 1) = (1-r)\Phi(i, 0) + \frac{r}{2}[\Phi(i-1, 0) + \Phi(i+1, 0)]$$

66



اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل هذلولی

مثال: حل معادله موج با شرایط اولیه و شرایط مرزی زیر:

$$\Phi_{tt} = \Phi_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t \geq 0$$

subject to the boundary conditions

$$\Phi(0, t) = 0 = \Phi(1, t), \quad t \geq 0$$

and the initial conditions

$$\begin{aligned} \Phi(x, 0) &= \sin \pi x, & 0 < x < 1, \\ \Phi_t(x, 0) &= 0, & 0 < x < 1 \end{aligned} \quad \square$$

67



اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل هذلولی

For $j = 0$, substituting

حل:

$$\Phi_t = \frac{\Phi(i, 1) - \Phi(i, -1)}{2\Delta t} = 0 \quad \longrightarrow \quad \Phi(i, 1) = \Phi(i, -1)$$

$$\Phi(i, 1) = \frac{1}{2}[\Phi(i-1, 0) + \Phi(i+1, 0)]$$

$$u = 1, \text{ and } r = 1, \quad \longrightarrow \quad \Delta t = \Delta x$$

$$\Delta t = \Delta x = 0.1$$

با انتخاب

68



اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل هذلولی

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	...
t								
0.0	0	0.3090	0.5879	0.8990	0.9511	1.0	0.9511	
0.1	0	0.2939	0.5590	0.7694	0.9045	0.9511	0.9045	
0.2	0	0.2500	0.4755	0.6545	0.7694	0.8090	0.7694	
0.3	0	0.1816	0.3455	0.4755	0.5590	0.5878	0.5590	
0.4	0	0.0955	0.1816	0.2500	0.2939	0.3090	0.2939	
0.5	0	0	0	0	0	0	0	
0.6	0	-0.0955	-0.1816	-0.2500	-0.2939	-0.3090	-0.2939	
0.7	0	-0.1816	-0.3455	-0.4755	-0.5590	-0.5878	-0.5590	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

69



اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل هذلولی

تمرین سری دوم: مثال فوق را در نرم افزار متلب پیاده سازی نمائید. در هر دو حالت فواصل نقاط را ۱ سانتی متر در نظر بگیرید و تا زمان ۱ ثانیه شبیه سازی کنید.

70



اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل بیضوی

فرم کلی معادله (معادله پواسن):

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = g(x, y)$$

تبدیل به معادله تفاضل محدود:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\Phi(i+1, j) - 2\Phi(i, j) + \Phi(i-1, j)}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\Phi(i, j+1) - 2\Phi(i, j) + \Phi(i, j-1)}{(\Delta y)^2} + O(\Delta y)^2$$

71



اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل بیضوی

$x = i \Delta x, y = j \Delta y$, and $i, j = 0, 1, 2, \dots$

assume that $\Delta x = \Delta y = h$,



$$\left[\Phi(i+1, j) + \Phi(i-1, j) + \Phi(i, j+1) + \Phi(i, j-1) \right] - 4\Phi(i, j) = h^2 g(i, j)$$



$$\Phi(i, j) = \frac{1}{4} \left[\Phi(i+1, j) + \Phi(i-1, j) + \Phi(i, j+1) + \Phi(i, j-1) - h^2 g(i, j) \right]$$

72

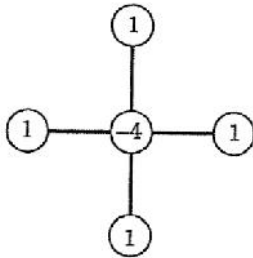


اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل بیضوی

اگر منبع ورودی را صفر فرض کنیم معادله پواسن به معادله لاپلاس تبدیل میشود:

$$g(x, y) = 0$$

$$\Phi(i, j) = \frac{1}{4} [\Phi(i+1, j) + \Phi(i-1, j) + \Phi(i, j+1) + \Phi(i, j-1)]$$



مقدار تابع در هر نقطه برابر میانگین مقادیر چهار نقطه اطراف میباشد.

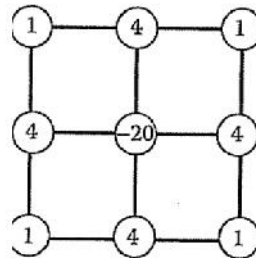
73



اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل بیضوی

معادله لاپلاس را با تعاریف مشتق با دقت بالاتر هم میتوان پیاده سازی نمود برای مثال:

$$\begin{aligned} -20\Phi(i, j) + 4[\Phi(i+1, j) + \Phi(i-1, j) + \Phi(i, j+1) + \Phi(i, j-1)] \\ + \Phi(i+1, j-1) + \Phi(i-1, j-1) + \Phi(i-1, j+1) \\ + \Phi(i+1, j+1) = 0 \end{aligned}$$



74



اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل بیضوی

معمولا فرم اول بیان معادله لاپلاس برای حل متداولتر است. با استفاده از این روش مقدار تابع در نقطه تابعی از چهار نقطه مجاورش میباشد. در نتیجه حل مسئله تبدیل به حل یک دستگاه بزرگ از معادلات میشود:

$$[A][X] = [B]$$

برای حل این دستگاه معادله دو روش متداول است:

$$[X] = [A]^{-1}[B]$$

روش مستقیم:

روش تکراری: روش جاکوبی، گوس سایدل و ...

75



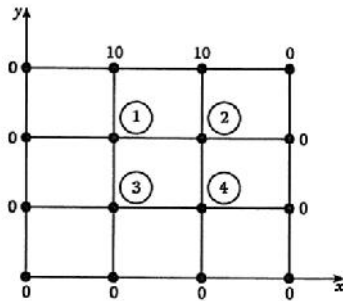
اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل بیضوی

مثال: حل معادله لاپلاس زیر

$$\nabla^2 V = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

شرایط مرزی:

$$V(x, 1) = 45x(1-x), \quad V(x, 0) = 0 = V(0, y) = V(1, y).$$



با انتخاب $h = 1/3$:

76



اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل بیضوی

$$4V_1 - V_2 - V_3 - 0 = 10$$

$$-V_1 + 4V_2 - 0 - V_4 = 10$$

$$-V_1 - 0 + 4V_3 - V_4 = 0$$

$$-0 - V_2 - V_3 + 4V_4 = 0$$

این معادلات را میتوان به صورت ماتریسی بیان نمود:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

77



اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل بیضوی

$$[A][V] = [B]$$

با حل این معادله ماتریسی به روش ماتریس معکوس و یا روش تکرار:

$$V_1 = 3.75, \quad V_2 = 3.75, \quad V_3 = 1.25, \quad V_4 = 1.25$$

78



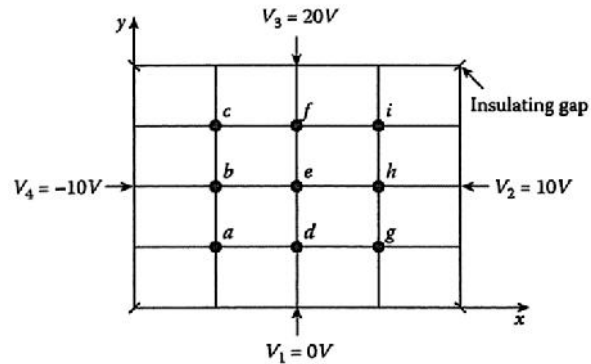
اعمال روش اجزای محدود به معادلات دیفرانسیل بیضوی

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_s}{\epsilon}, \quad 0 \leq x, y \leq 1$$

تمرین سری سوم: معادله پواسن زیر را حل کنید:

در این معادله مقدار چگالی سطحی بار الکتریکی مطابق رابطه زیر تغییر میکند:

$$\rho_s = x(y-1) \text{ nC/m}^3 \quad \text{and} \quad \epsilon_r = 1.0.$$



79



دقت و پایداری روش تفاضل محدود

خطای ناشی از
مدلسازی

خطای ناشی از
مختوم سازی

خطاهای ناشی از
گرد کردن

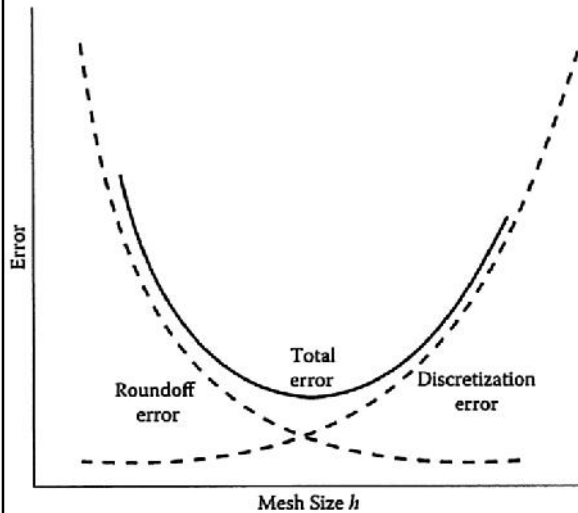
منابع ایجاد خطا

80



دقت و پایداری روش تفاضل محدود

با کوچک کردن سایز مش بندی خطای گسسته سازی کاهش میابد ولی چون حجم حافظه افزایش میابد مجبور به کاهش دقت اعداد هستیم که باعث افزایش خطای گرد کردن میشود.



81



دقت و پایداری روش تفاضل محدود

پایداری: یک الگوریتم عددی زمانی پایدار است که خطای ایجاد شده در هر مرحله منجر به خطای تجمعی کمتر در مرحله بعد شود.

نحوه بررسی: فرض کنیم خطا در مرحله n برابر ϵ^n باشد. خطا در مرحله بعد از رابطه زیر محاسبه میشود:

$$\epsilon^{n+1} = g\epsilon^n$$

برای پایداری روش عددی :

$$|\epsilon^{n+1}| \leq |\epsilon^n|$$



$$|g| \leq 1$$

82



دقت و پایداری روش تفاضل محدود

روش ون نیومن:

مثال:

$$\Phi_i^{n+1} = (1-2r)\Phi_i^n + r(\Phi_{i+1}^n + \Phi_{i-1}^n)$$

$$\text{where } r = \Delta t / k(\Delta x)^2$$

استفاده از سری فوریه:

$$\Phi_i^n = \sum A^n(t) e^{jkix}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$\Phi_i^n = A^n(t) e^{jkix}$$

با در نظر گرفتن یک مود از سری فوریه:

جایگذاری در معادله تفاضلی:

$$A^{n+1} e^{jkix} = (1-2r)A^n e^{jkix} + r(e^{jkx} + e^{-jkx}) A^n e^{jkix}$$

83



دقت و پایداری روش تفاضل محدود

$$A^{n+1} = A^n [1 - 2r + 2r \cos kx]$$

$$\begin{aligned} \text{L} \rightarrow g = \frac{A^{n+1}}{A^n} &= 1 - 2r + 2r \cos kx \\ &= 1 - 4r \sin^2 \frac{kx}{2} \end{aligned} \quad \rightarrow \left| 1 - 4r \sin^2 \frac{kx}{2} \right| \leq 1$$

$$\rightarrow 1 - 4r \geq -1 \quad \text{and} \quad r \geq 0 \quad \rightarrow r \geq \frac{1}{2} \quad \text{and} \quad r \geq 0$$

$$0 < r \leq \frac{1}{2}$$

84



حل معادله انتشار موج یک بعدی در فضای آزاد

معادلات ماکسول در فضای آزاد:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \times \mathbf{H}$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{E}.$$

فرض انتشار موج در راستای محور Z باشد و مولفه های موج شامل E_x و H_y باشد.

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial H_y}{\partial z}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial E_x}{\partial z}.$$

85



حل معادله انتشار موج یک بعدی در فضای آزاد

با استفاده از تعریف مشتق معادلات به فرم تفاضلی تبدیل میگرد:

$$\frac{E_x^{n+1/2}(k) - E_x^{n-1/2}(k)}{\Delta t} = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{H_y^n(k+1/2) - H_y^n(k-1/2)}{\Delta x}$$

$$\frac{H_y^{n+1}(k+1/2) - H_y^n(k+1/2)}{\Delta t} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{E_x^{n+1/2}(k+1) - E_x^{n+1/2}(k)}{\Delta x}.$$

متغیر زمان و مکان به صورت زیر تعریف میشوند:

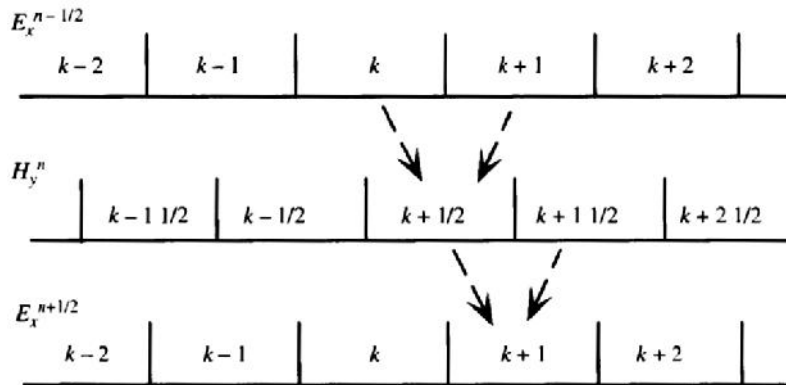
$$t = \Delta t \cdot n$$

$$z = \Delta x \cdot k$$

86



حل معادله انتشار موج یک بعدی در فضای آزاد



87



حل معادله انتشار موج یک بعدی در فضای آزاد

$$E_x^{n+1/2}(k) = E_x^{n-1/2}(k) - \frac{\Delta t}{\epsilon_0 \cdot \Delta x} [H_y^n(k+1/2) - H_y^n(k-1/2)]$$

$$H_y^{n+1}(k+1/2) = H_y^n(k+1/2) - \frac{\Delta t}{\mu_0 \cdot \Delta x} [E_x^{n+1/2}(k+1) - E_x^{n+1/2}(k)].$$

از لحاظ عددی اندازه متغیر E و H بسیار متفاوت است و این مسئله دقت محاسبات را کاهش میدهد برای حل این مشکل از تغییر متغیر زیر استفاده میشود:

$$\tilde{E} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E.$$



$$\tilde{E}_x^{n+1/2}(k) = \tilde{E}_x^{n-1/2}(k) - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{\Delta t}{\Delta x} [H_y^n(k+1/2) - H_y^n(k-1/2)]$$

$$H_y^{n+1}(k+1/2) = H_y^n(k+1/2) - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{\Delta t}{\Delta x} [\tilde{E}_x^{n+1/2}(k+1) - \tilde{E}_x^{n+1/2}(k)]$$

88



حل معادله انتشار موج یک بعدی در فضای آزاد

گام های زمانی بر اساس رابطه زیر مشخص میشود:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{2 \cdot c_0}$$

where c_0 is the speed of light in free space.



$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{\Delta t}{\Delta x} = c_0 \cdot \frac{\Delta x/2 \cdot c_0}{\Delta x} = \frac{1}{2}$$

89



شرط پایداری

سرعت انتشار موج نمیتواند از سرعت نور بیشتر باشد بنابراین حداقل زمانی که طول میکشد که موج به اندازه حرکت کند برابر:

$$\Delta t = \Delta x / c_0$$

در حالت یک بعدی:

$$\Delta t = \Delta x / (\sqrt{2} c_0)$$

در حالت دو بعدی:

$$\Delta t = \Delta x / (\sqrt{3} c_0)$$

در حالت سه بعدی:

شرط کورانت:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\sqrt{n} \cdot c_0},$$

در حالت n بعدی:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{2 \cdot c_0}$$

در این کتاب:

90



شرایط مرزی جاذب در حالت یک بعدی

برای جلوگیری از انعکاس امواج از مرزهای ناحیه حل باید از شرایط مرزی جاذب استفاده نمائیم.

با توجه به گام زمانی انتخاب شده در این مسئله، مسافتی که موج در یک بازه زمانی طی میکند برابر:

$$\text{distance} = c_0 \cdot \Delta t = c_0 \cdot \frac{\Delta x}{c_0} = \frac{\Delta x}{2}.$$

بنابراین میتوان مقدار تابع در مرز ناحیه را با مقدار تابع در نقطه قبلی در دو گام زمانی قبل تر یکسان فرض نمود.

$$E_x^n(0) = E_x^{n-2}(1).$$

91



حل معادله انتشار موج یک بعدی در یک دی الکتریک

اصلاح روابط:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_r \epsilon_0} \nabla \times \mathbf{H}$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{E}.$$

اعمال روش تفاضل محدود:

$$\frac{\tilde{E}_x^{n+1/2}(k) - \tilde{E}_x^{n-1/2}(k)}{\Delta t} = \frac{1}{\epsilon_r \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \cdot \frac{H_y^n(k+1/2) - H_y^n(k-1/2)}{\Delta x}$$

$$\frac{H_y^{n+1}(k+1/2) - H_y^n(k+1/2)}{\Delta t} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\tilde{E}_x^{n+1/2}(k+1) - \tilde{E}_x^{n+1/2}(k)}{\Delta x}.$$

92



حل معادله انتشار موج یک بعدی در یک دی الکتریک

چون $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{1}{2}$



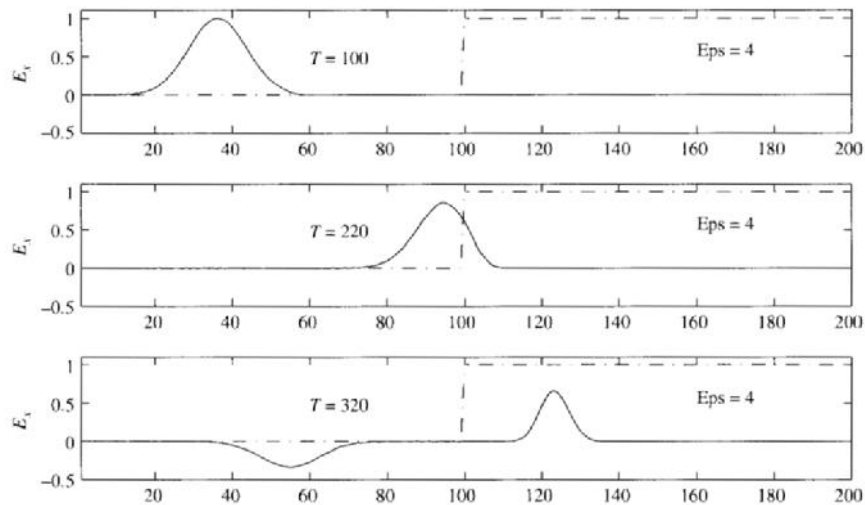
$$\tilde{E}_x^{n+1/2}(k) = \tilde{E}_x^{n+1/2}(k) + \frac{1/2}{\epsilon_r} [H_y^n(k+1/2) - H_y^n(k-1/2)]$$

$$H_y^{n+1}(k+1/2) = H_y^n(k+1/2) - \frac{1}{2} [\tilde{E}_x^{n+1/2}(k+1) - \tilde{E}_x^{n+1/2}(k)].$$

93



حل معادله انتشار موج یک بعدی در یک دی الکتریک



94



تعیین ابعاد مش

به طور معمول برای انتخاب تعداد نقاط برای هر طول موج از عدد ۱۰ استفاده میشود. به طور مثال اگر فرکانس منبع ۴۰۰ مگاهرتز باشد:

$$\lambda_0 = \frac{c_0}{400 \text{ MHz}} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/sec}}{4 \times 10^8 \text{ sec}^{-1}} = .75 \text{ m.}$$



$$\Delta x = \lambda_0 / 10 = 7.5 \text{ cm.}$$

95



حل معادله انتشار موج یک بعدی در فضای آزاد

مثال: شبیه سازی انتشار یک موج الکترومغناطیسی با منبع انتشار گوسی

مرحله اول: ساخت تابع گوسی

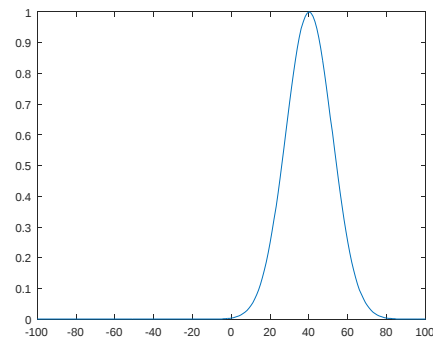
$$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$e = 2.7182\dots$ (Euler's number)

x = data to be plotted

σ = standard deviation

μ = mean, median and mode (all simultaneously)



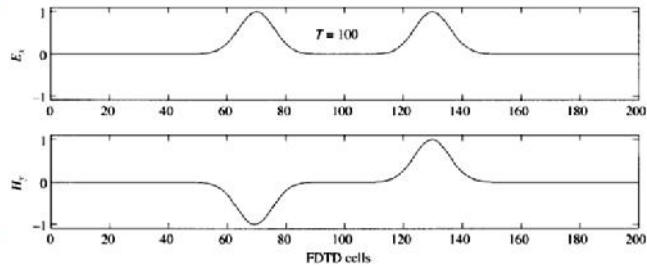
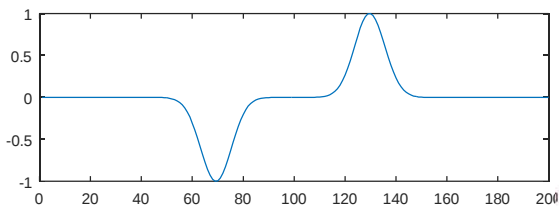
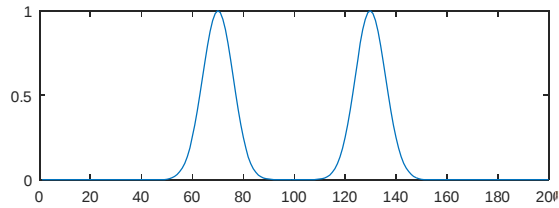
96



حل معادله انتشار موج یک بعدی در فضای آزاد

مرحله دوم: محاسبه میدان ها

پاسخ به ازای $T=100$

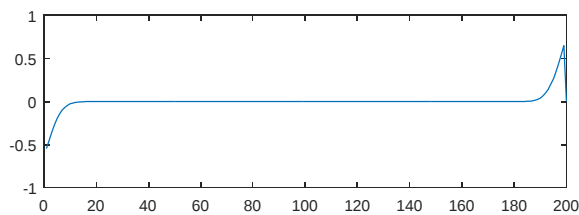
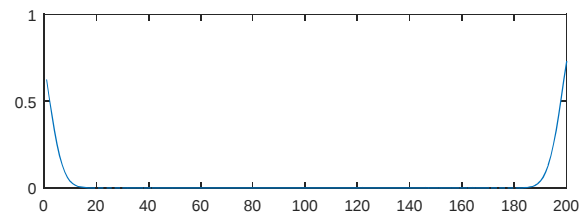


97



حل معادله انتشار موج یک بعدی در فضای آزاد

مرحله سوم: اعمال شرایط مرزی جاذب (تمرین سری چهارم)



98



حل معادله انتشار موج دو بعدی در فضای آزاد

معادلات ماکسول در حالت کلی

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{D}}}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \nabla \times \mathbf{H}$$

$$\tilde{\mathbf{D}}(\omega) = \epsilon_r^*(\omega) \cdot \tilde{\mathbf{E}}(\omega)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \nabla \times \tilde{\mathbf{E}}$$

در مود انتشاری میتوان فرض نمود:

$$\tilde{E}_z, H_x, \text{ and } H_y$$

مود TM:

$$\tilde{E}_x, \tilde{E}_y, \text{ and } H_z$$

مود TE:

99



حل معادله انتشار موج دو بعدی در فضای آزاد

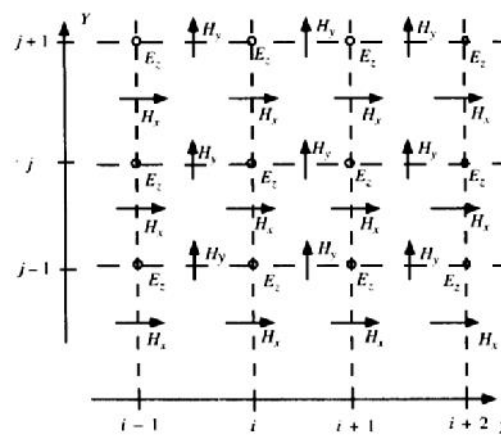
با فرض مود TM

$$\frac{\partial D_z}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right)$$

$$D_z(\omega) = \epsilon_r^*(\omega) \cdot E_z(\omega)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = -\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{\partial E_z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{\partial E_z}{\partial x}$$



100



حل معادله انتشار موج دو بعدی در فضای آزاد

$$\frac{D_z^{n+1/2}(i, j) - D_z^{n-1/2}(i, j)}{\Delta t} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \left(\frac{H_y^n(i+1/2, j) - H_y^n(i-1/2, j)}{\Delta x} - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \left(\frac{H_x^n(i, j+1/2) - H_x^n(i, j-1/2)}{\Delta x} \right) \right)$$

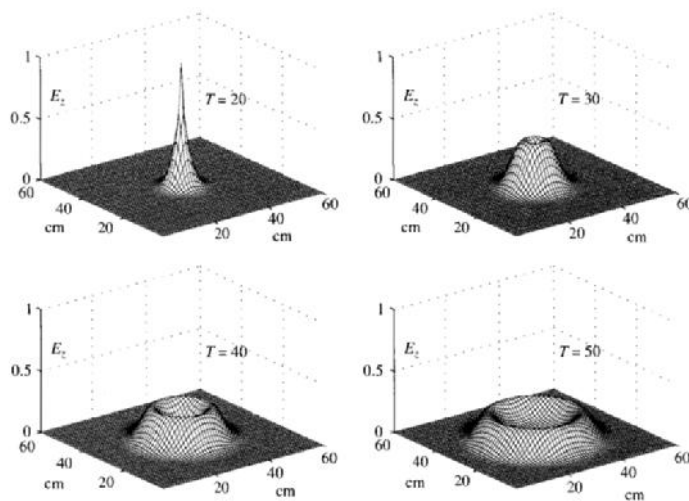
$$\frac{H_x^{n+1}(i, j+1/2) - H_x^n(i, j+1/2)}{\Delta t} = -\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{E_z^{n+1/2}(i, j+1) - E_z^{n+1/2}(i, j)}{\Delta x}$$

$$\frac{H_y^{n+1}(i+1/2, j) - H_y^n(i+1/2, j)}{\Delta t} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{E_z^{n+1/2}(i+1, j) - E_z^{n+1/2}(i, j)}{\Delta x}$$

101



حل معادله انتشار موج دو بعدی در فضای آزاد



102



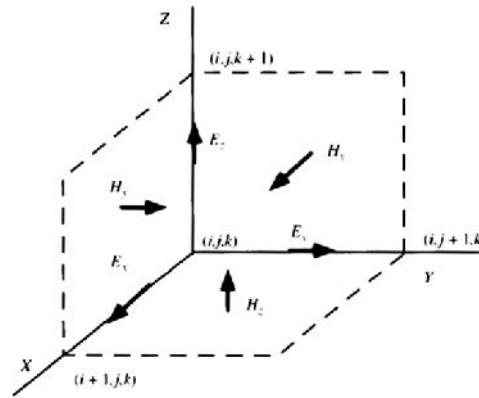
حل معادله انتشار موج سه بعدی در فضای آزاد

معادلات ماکسول در حالت کلی

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{D}}}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \cdot \nabla \times \mathbf{H}$$

$$\tilde{\mathbf{D}}(\omega) = \epsilon_r^*(\omega) \cdot \tilde{\mathbf{E}}(\omega)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \nabla \times \tilde{\mathbf{E}}.$$



استفاده از سلول محاسباتی Yee

103



حل معادله انتشار موج سه بعدی در فضای آزاد

$$\frac{\partial D_x}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial D_y}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial D_z}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right).$$

104



حل معادله انتشار موج سه بعدی در فضای آزاد

$$\begin{aligned}
 D_z^{n+1/2}(i, j, k + 1/2) &= D_z^{n-1/2}(i, j, k + 1/2) \\
 &+ \frac{\Delta t}{\Delta x \cdot \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} (H_y^n(i + 1/2, j, k + 1/2) - H_y^n(i - 1/2, j, k + 1/2) \\
 &- H_x^n(i, j + 1/2, k + 1/2) + H_x^n(i, j - 1/2, k + 1/2)) \\
 H_z^{n+1}(i + 1/2, j + 1/2, k) &= H_z^n(i + 1/2, j + 1/2, k) \\
 &- \frac{\Delta t}{\Delta x \cdot \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} (E_y^{n+1/2}(i + 1, j + 1/2, k) - E_y^{n+1/2}(i, j + 1/2, k) \\
 &- E_x^{n+1/2}(i + 1/2, j + 1, k) + E_x^{n+1/2}(i + 1/2, j, k)).
 \end{aligned}$$