PDF.tarikhema.org

مثلثات

مخصوص دورهٔ دوم متوسطه

مطابق دستور شورای عالی معارف

تالیف

محسن هریسچی — محمود مهران

معلمین علوم ریاضی

حق طبع محفوظ است

آذر ۱۳۱۳

مطبعه نوبن - طهران

tarikhema.org

PDF.tarikhema.org

گلستان صاحب

حافظ

محمود تنبزه تاجر

Farsi

Farsi

Joseph Naamani
1622

مثلثات

برای دورهٔ دوم متوسطه

۴۲۹۸۷۹

مطابق دستور وزارت جلیلهٔ معارف

کتابخانه موزه و مرکز اسناد مجلس شورای اسلامی
تأسیس ۱۳۰۲ هجری شمسی

تألیف

محسن هنربخش - محمود مهران

معلمین علوم ریاضی

حق طبع محفوظ است

چاپخانه
آذر ۱۳۱۳

tarikhema.org
PDF.tarikhema.org

بنام یزد دانا

فصل اول - قوس و زاویه

۱- اندازه قوسی از محیط دایره - اندازه گرفتن قوسی از محیط دایره سنجیدن آنقوس است با قوسی از همین دایره که واحد فرض شده

برای اندازه گرفتن قوس دایره سه نوع واحد معمول است

درجه - $\frac{1}{360}$ محیط دایره را واحد قرارداده آنرا درجه نامیده مبدای اندازه گرفتن قوسهای کوچکتر از درجه هر درجه را به ۶۰ دقیقه و هر دقیقه را به ۶۰ ثانیه تقسیم کرده آحاد کوچکتر از ثانیه با اعشار ثانیه اندازه گرفته میشود

بنابراین محیط هر دایره ۳۶۰ و نصف آن ۱۸۰ و ربع آن ۹۰ درجه است

گراد Grade - $\frac{1}{400}$ محیط دایره به گراد موسوم است اجزاء آن دسی گراد مساوی $\frac{1}{10}$ گراد و سانتی گراد برابر $\frac{1}{100}$ گراد و میلی گراد معادل $\frac{1}{1000}$ گراد است بتصمیکه اندازه قوس دایره بین دستگاه عدد اعشاری میشود

از اینقرار محیط هر دایره ۴۰۰ و نصف آن ۲۰۰ و ربع آن ۱۰۰ گراد است

رادیان Radian - قوسی از محیط دایره که طولش برابر شعاع است واحد قوس اردوه آنرا رادیان نامند

بنابراین اندازه محیط هر دایره 2π و نصف آن π و ربع آن $\frac{\pi}{2}$ است

مسئله - اندازه قوسی بجب یکی از آحاد معلوم است مطلوبست محاسبه آن بجب آحاد دیگر

فرض میکنیم قوسی A درجه و A' گراد و a رادیان باشد چون ملاحظه کنیم که محیط دایره ۳۶۰ درجه و ۴۰۰ گراد و 2π رادیان است لذا نسبت قوس مفروض بمحیط در واحد اول $\frac{A}{360}$ و در واحد دوم $\frac{A'}{400}$ و در واحد سوم $\frac{a}{2\pi}$ میباشد اما نسبت قوس مفروض بمحیط مقداریست ثابت لذا حاصل میشود

$$\frac{a}{2\pi} - \frac{A'}{400} - \frac{A}{360} \qquad (1)$$

از روابط فوق تبعیض معلوم بودن هریک از مقادیر A یا A' یا a میتوان دو مقدار دیگر را حساب نمود از اینقرار:

$$A = \frac{9}{10}A' = 180\,a\,\frac{1}{\pi}\ ,\quad A' = \frac{10}{9}A = 200\,a\,\frac{1}{\pi}\ ,\quad a = \frac{\pi A}{180} = \frac{\pi A'}{200}$$

---

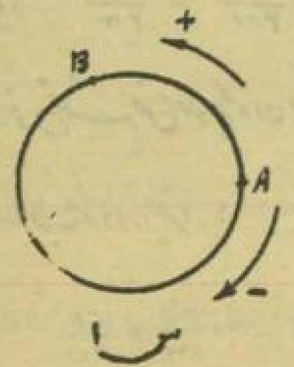
* متعلمین باید دستوراتی را که بامره ترتیب ممتازند همواره در نخاطر داشته باشند

تبصره - در حل مسائل مربوط به تبدیلات فوق لازم است که مقادیر π و $\frac{1}{\pi}$ را تا چهار رقم بعد از اعشار بخاطر سپرد $\pi = 3,1416$ و $\frac{1}{\pi} = 0,3183$

مثال - مطلوبست اندازهٔ قوسی از دایره برحسب درجه و گراد در صورتیکه طولش مساوی شعاع دایره باشد

چون $a=1$ لذا از دستورات فوق نتیجه میشود: $A = 180 \frac{1}{\pi} = 57,2958$ پس از تبدیل $A = 57^\circ\ 17'\ 44'',8$ و برحسب گراد $A' = 200 \times \frac{1}{\pi} = 63,662$ گراد

۲- **دایرهٔ جهت دار** - هر نقطه متحرک میتواند محیط دایرهٔ او در دو جهت سیر نماید که یکی از دو جهت را مثبت و دیگری را منفی قرار داده و چنین دایره را دایره جهت دار نامند عموماً جهت مثبت بر خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت است



۳- **اندازه قوس جهت دار** - اندازه قوسی از محیط دایره عبارت از اندازه قطعهٔ از این محیط محصور بین دو نقطه است ولی در مثلثات علاوه بر کمیت قوس جهت نیز در آن دخالت دارد بقسمیکه قوس شبیه بحامل میشود

اندازهٔ قوس جهت دار بمبدأ A و منتهای B (س ۱) عبارت است از اندازه

مسافت مطلوبه متحرکی که از مبدأ A موافق یکی از دو جهت حرکت نموده به B رسیده باشد اندازهٔ این قوس وقتی مثبت است که حرکت متحرک در جهت مثبت صورت گرفته باشد والا منفی است از اینجا معلوم میشود که اندازهٔ قوس دایره جهت دار غیر معین است زیرا ممکن است که متحرک این قوس را در جهت مثبت و یا در جهت منفی پیموده باشد و یا پس از چندین بار طی محیط دایره بمنتها برسد پس $\overset{\frown}{AB}$ نمایش یکی از اندازه‌های قوس‌های مطلوبه متحرکی است که از مبدأ A حرکت نموده بمنتهای B رسیده باشد

۴- **قضیه** - تفاضل بین اندازه‌های مختلفهٔ قوس جهت دار مضربی است صحیح (مثبت یا منفی و یا صفر) از اندازه محیط دایره

فرض میکنیم اندازه بسیطی قوس AB (س ۱) برحسب رادیان برابر a باشد پس چون متحرک از مبدأ A در جهت مثبت مثلثاتی حرکت نموده در اولین دفعه بنقطه B رسد قوسی برابر a پیموده است حال اگر حرکت خود را ادامه داده در دفعهٔ دوم بنقطه B رسد قوسی برابر $a+2\pi$ پیموده است و در دفعهٔ سوم قوسی مساوی $a+2\cdot2\pi$ و بالاخره در دفعه n ام قوسی برابر $a+2(n-1)\pi$ و یا بطور کلی $a+2k\pi$ (۱) پیموده است اگر متحرک مفروض در جهت منفی حرکت کند در اولین دفعه که به B میرسد قوسی طی میکند برابر

$\alpha - 2\pi$ و چون حرکت خود را در همین جهت ادامه داده در دفعه دوم بنقطه B رسد قوسی مساوی

$\alpha - 2.2\pi$ خواهد پیمود بهمینکه در دفعه n ام قوسی که اندازه‌اش $\alpha - 2n\pi$ (۲) است

طی مینماید

دو عبارت (۱) و (۲) را میتوان بیک عبارت کلی $\alpha + 2K\pi$ تبدیل نمود که در آن

K نمایش عدد صحیح (مثبت و یا منفی و یا صفر) میباشد

حال اگر α و α' دو اندازه غیر مشخص قوس AB باشند بر وفق دستور کلی فوق میتوان

چنین نوشت $\alpha = \alpha + 2K\pi$ و $\alpha' = \alpha + 2K'\pi$ از تفریق این دو تساوی

حاصل میشود $\alpha - \alpha' = 2(K - K')\pi$ چون K و K' اعدادی صحیحند بنابراین تفاضلشان

نیز عددی صحیح بوده و لذا حکم محقق است

تبصره ۱ـ اگر α یکی از اندازه‌های قوس $\widehat{AB}$ برحسب ادیان باشد سایر اندازه‌های

این قوس از دستور ذیل معلوم میشود $\widehat{AB} = \alpha + 2k\pi$ (k عددی است

صحیح مثبت یا منفی و یا صفر) و چون α را برحسب درجه برابر A و برحسب گراد مساوی

A' فرض کنیم دستور فوق چنین میشود :

$\widehat{AB} = A + k.360$ و $\widehat{AB} = A' + k.400$

چنانکه اندازه نصف محیط دایره برحسب ادیان چنین است $\pi + 2K\pi$

یا $\pi(2K+1)$ یعنی کلیه اندازه‌های نصف محیط دایره مضروب فردی است از π

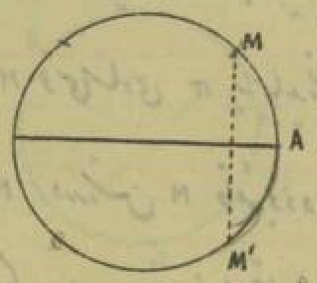
تبصره ۲ـ عکس قضیه فوق بسهولت اثبات میشود و بطور کلی میتوان آنرا چنین بیان نمود:

در دایره جهت دار شرط لازم و کافی برای اینکه دو قوس متحد المبدأ دارای یک انتها باشند

آنست که تفاضل اندازه‌های آنها مضرب صحیح (مثبت یا منفی و یا صفر) از محیط دایره باشد

۵ـ **قوسهای قرینه** ـ هرگاه انتهای دو قوس متحد المبدأ نسبت بقطر مار بر مبدأ مشترک

قرینه یکدیگر باشند چنین دو قوس را قرینه



گویند مانند قوسهای $\widehat{AM}$ و $\widehat{AM'}$

(شکل ۲)

از تعریف فوق بسهولت میتوان تحقیق نمود که:

مجموع اندازه‌های دو قوس قرینه مضرب صحیح (مثبت یا منفی و یا صفر) از محیط دایره میباشد

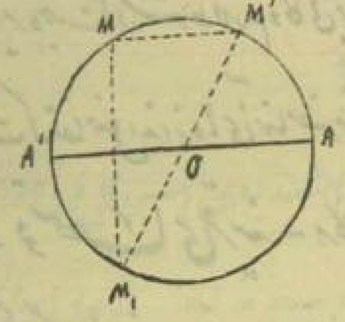
۶ـ **قوسهای مکمل و متمم** ـ دو قوس را مکمل یکدیگر گویند وقتیکه مجموع اندازه‌های آنها مساوی

اندازه نصف محیط دایره باشد و وقتی متممند که مجموع اندازه‌های آنها برابر اندازه ربع دایره باشد

مثلاً قوسهای α و $\alpha - \pi$ مکمل و قوسهای α و $\alpha - \frac{\pi}{2}$ متممند

۷- **قضیه** — شرط لازم و کافی برای اینکه دو قوس متحدالمبدا مکمل یکدیگر باشند آنست که خط واصل بین دو انتهایشان موازی قطر مارّ از مبدا مشترک باشد

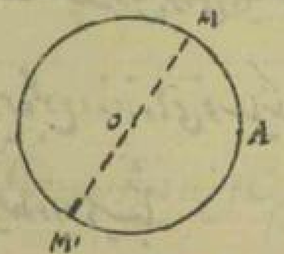
فرض میکنیم متحرکی از مبدا A بر محیط دایره حرکت نموده و پس از طی قوس α بنقطه M رسیده باشد برای اینکه متحرک دیگری مکمل این قوس یعنی $\alpha - \pi$ را بپیماید کافی است که از مبدا A قوسی برابر α طی کند در اینصورت بنقطه M_1 قرینه M خواهد رسید و چون از نقطه M_1 قوسی مساوی π بپیماید بنقطه M' قرینه مرکزی M_1 میرسد لذا مثلث MM_1M' در رأس M قائمه بوده و چون ضلع MM_1 بر قطر AA' عمود است پس ضلع دیگر MM' موازی این قطر میشود



۸- **قضیه** — هرگاه تفاضل اندازه‌های دو قوس متحدالمبدا مضرب فردی از نیم دایره باشد دو انتهای آنها نسبت بمرکز دایره قرینه خواهند بود

فرض میکنیم $\overset{\frown}{AM'} - \overset{\frown}{AM} = \pi + 2k\pi$ باشد حال چون ملاحظه کنیم که $\overset{\frown}{AM'} - \overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MM'}$ میباشد لذا نتیجه میشود که اندازه قوس $\overset{\frown}{MM'}$ مساوی اندازه نصف محیط دایره بوده و بنابراین دو نقطه

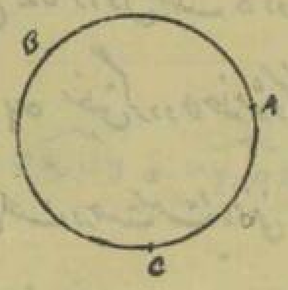
M و M' طرفین یک قطر واقع خواهند بود



۹- **قضیه** — چون بر محیط دایره سه نقطه A و B و C را فرض کنیم بموازات بین اندازه‌های سه قوس $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{BC}$ و $\overset{\frown}{CA}$ این رابطه برقرار است

$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CA} = 2K\pi$ (K عددی است صحیح مثبت یا منفی و یا صفر)

اگر a و b و c بترتیب اندازه‌های مسدسی قوسهای $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{BC}$ و $\overset{\frown}{AC}$ باشند نتیجه میشود $c = a + b$ (۱)



بنابر آنچه دیدیم کلیه اندازه‌های قوسهای $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{BC}$ و $\overset{\frown}{AC}$ چنین اند

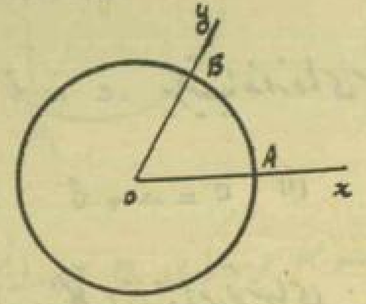
$\overset{\frown}{AB} = a + 2h\pi$ و $\overset{\frown}{BC} = b + 2h'\pi$ و $\overset{\frown}{AC} = c + 2h''\pi$

حال اگر مقادیر a و b و c را از این رابطه خارج نموده در رابطه (۱) گذاریم پس از جمع جبری متشابه چنین میشود $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + 2k\pi$ چون بر طرفین این تساوی قوس $\overset{\frown}{CA}$ را علاوه نموده و $2k\pi$ را بطرف ثانی نقل دهیم با ملاحظه $\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CA} = 2n\pi$ حکم قضیه محقق است

تبصره – قضیه فوق برای n نقطه واقع بر محیط دایره نیز محقق بوده و آنرا میتوان چنین بیان نمود

در یک دایره مجموع اندازه های قوسهائیکه مبدا و یکی منتهای دیگری است مضرب صحیح (مثبت یا منفی و یا صفر) محیط دایره میباشد

۱۵- اندازه زاویه – در صفحه زاویه xoy جهت دوران ضلع ox حول نقطه o را که مخالف جهت دوران عقربه های ساعت است جهت مثبت قرارداده و جهت مخالف آنرا جهت منفی اختیار میکنیم



حال اگر ضلع ox را حول نقطه o دوران دهیم تا بر oy منطبق گردد ملاحظه میشود که این انطباق ممکن است در جهت مثبت و یا منفی پس از پیمودن یک یا چند دور حول نقطه o حاصل گردد بطوریکه برای انطباق ox بر oy زوایای مختلفه را ممکن است ضلع ox بپیماید بنابتعریف اندازه هریک از این زوایا را اندازه زاویه دو خط شعاعی ox و oy میگویند و علامت آن مثبت یا منفی است بنابر آنکه جهت دوران مثبت و یا منفی باشد از این نتیجه میشود که اندازه زاویه نیز مانند قوس غیر معین است

برای نمایش زاویه دو خط شعاعی ox و oy ضلع ox را مبداء و oy را منتهای میدانیم

آنرا چنین مینویسند $\widehat{xox,yoy}$

میدانیم اندازه زاویه مرکزی مساوی اندازه قوس واقع بین ضلعین آنست در صورتیکه واحد آنها زاویه باشد که قوس مقابلش واحد قوس فرض شود

از اینجا معلوم میشود که آنچه راجع باندازه قوس ها ذکر نمودیم شامل زاویه نیز خواهد بود چنانکه اگر A و A' و α بترتیب یکی از اندازه های زاویه $\widehat{xox,yoy}$ برحسب ادیان و درجه و گراد باشد روابط ذیل حاصل است :

$$\widehat{xox,yoy} = \alpha + 2K\pi \qquad \widehat{xox,yoy} = A + K.360^\circ \qquad \widehat{xox,yoy} = A' + K.400^g$$

همچنین اگر خطوط شعاعی متحد المبدا ox و oy و oz و ..... و ok مفروض باشند همواره این رابطه برقرار است :

$$\widehat{xox,yoy} + \widehat{yoy,zoz} + \dots\dots + \widehat{kok,xox} = 2K\pi$$

تمرینات

۱- قوس های ذیل را برحسب درجه و رادیان حساب کنید

گراد	گراد	گراد	گراد
۳۸/۵۴۳	۷۵۰/۲۵	۹۰	۵۵ و ۱۵

۲- قوس های ذیل را برحسب گراد و رادیان حساب کنید

$36^\circ/5$ و 12° و 18° و $42^\circ 35$ و 150°

PDF.tarikhema.org

۳- قوس‌های ذیل را برحسب درجه و گراد حساب کنید

رادیان	گراد	رادیان	گراد	رادیان
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{17\pi}{12}$	۳	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$

۴- شعاع دایره ۱٫۴۰ متر است مطلوبست محاسبه طول سه قوس از این دایره که اندازه آنها بترتیب برابر
گراد رادیان
۱۸٫۳ و ۲۵ و ۵۵ و ۲٫۷ باشد

۵- طولهای قوسهائی از دایره بشعاع واحد برابرند با :

$\frac{\sqrt{2}}{20} + \frac{2}{2}$ و $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ و $\frac{\sqrt{3+\sqrt{2}}}{2}$ و $\frac{22}{7}$ و ۳

مطلوبست محاسبه آنها برحسب درجه و گراد

۶- وضع نسبی انتهای سه قوس متحد المبدأ α و $\alpha+\frac{\pi}{3}$ و $\alpha+\frac{2\pi}{3}$ را تعیین کنید

۷- متمم و مکمل قوسهای ذیل را حساب کنید

$19^{\circ}\,75'$ و $18^{\circ}\,15'\,297''$ و $27'\,115^{\circ}$ و $18^{\circ}\,14^{\circ}$
و $274^{\circ},25$ و $12^{\circ},51$ گراد و $1743^{\circ},075$ گراد و $84^{\circ},19$ گراد

و $-\frac{7\pi}{12}$ و $\frac{19\pi}{3}$ و $\frac{5\pi}{6}$ و $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{\pi}{6}$

۸- تعریف - در روی دایره جهت‌دار نقطه O را مبدأ اقرار داده اندازه قوس $\overset{\frown}{OH}$ را طول منحنیه نقطه H گویند

اگر طولهای منحنیه دو نقطه A و B معلوم باشد مطلوبست محاسبه اندازه قوس $\overset{\frown}{AB}$

۹- انتهای بریک از قوسهای ذیل را بازاء مقادیر مختلف k تعیین کنید (k عددی است صحیح و جبری)

$\frac{2k\pi}{4}$ و $-\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}$ و $-\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}$

۱۰- مطلوبست تعیین اوساط قوسهائیکه در مبدأ و منتهایشان بر هم منطبق باشند اندازه این قوسهای نصف راز در مبدأ مشترک تعیین کنید

۱۱- فرض میکنیم a و b اندازه‌های دو قوس مبدأ مشترک A و با نهای M و N باشند برگاه p و q اوساط قوسهای MN فرض شوند ثابت کنید که کلیه اندازه‌های قوسهای $\overset{\frown}{AP}$ و $\overset{\frown}{AQ}$ را میتوان از عبارت ذیل تعیین نمود $k\pi + \frac{a+b}{2}$

(k عدد صحیح جبریست)

۱۲- ثابت کنید که واسطه عددی دو قوس $\overset{\frown}{AM}$ و $\overset{\frown}{AM'}$ قوسی است که مبدأش نقطه A بوده و منتهایش وسط قوس MM' باشد

فصل دوم

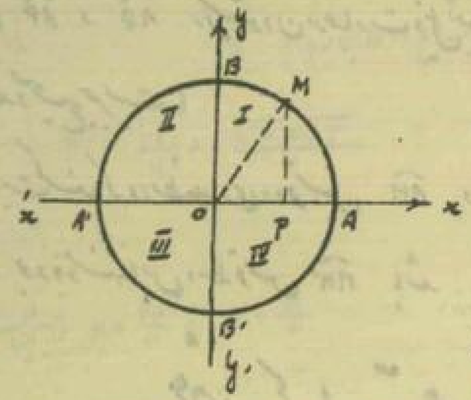
توابع مستدیره یا خطوط مثلثاتی

۱۱- توابع مستدیره - توابع مستدیره توابعی هستند که در آنها متغیر قوسی از محیط دایره باشد

۱۲- توابع متناوبه - تابع $f(x)$ را متناوب گویند وقتیکه بازاء جمیع مقادیر x این رابطه متحقق باشد $f(x+A) = f(x)$ مقدار ثابت A را دوره تناوب گویند

۱۳- دایرهٔ مثلثاتی - دایره مثلثاتی دایره ایست که شعاعش واحد طول فرض شود

۱۴- جیب تمام - Cosinus - نقطهٔ A را بر محیط دایره مثلثاتی o مبدأ قرار داده بر قطر AA' محور x'x را که بجور جیب تمام موسوم است رسم میکنیم جهت مثبت بر این محور از o بسمت A است



جیب تمام قوس غیر مشخص $\overset{\frown}{AH}$

عبارت از تصویر قائم حامل OM بر محور x'x است و یا عبارت از طول نقطه M نسبت بمحورهای مختصات x'x و y'y عمود بر آن میباشد

جیب تمام قوس $\overset{\frown}{AH}$ را من باب اختصار چنین نویسند $Cos\overset{\frown}{AH}$ ولذا $Cos AM = \overline{OP}$

از اینجا معلوم میشود که $\overline{OP}$ جیب تمام کلیه قوسهائی است که مبدأ A و منتهای H باشد

بطوریکه اگر یکی از اندازه‌های قوس $\overset{\frown}{AH}$ را مساوی a فرض کنیم چنین نتیجه میشود

$$Cos(a + 2K\pi) = Cos\, a \qquad (2)$$

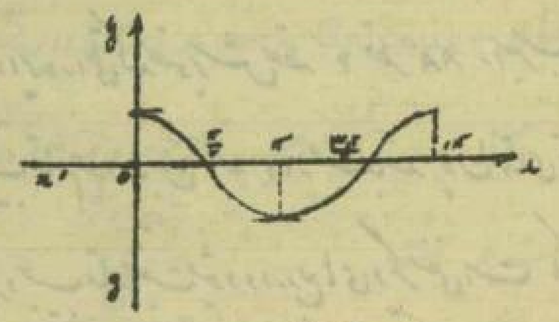
تغییرات جیب تمام - چون قطر B'B عمود بر A'A را در وسط مساحت دایره مثلثاتی بچهار ربع تقسیم میشود

هرگاه نقطه M محیط دایره را طی کند تصویرش نقطه ? قطر AA' را سیر مینماید لذا بازاء جمیع مقادیر قوس جیب تمام همواره بین +۱ و -۱ میباشد چون انتهای قوس در ربع های اول و چهارم قرار گیرد جیب تمام مثبت میشود و در ربع های دیگر منفی است ، اگر نیم آنوقتی است که قوس $\overset{\frown}{AH}$ مضرب محیط دایره باشد $Cos 2K\pi = +1$ و وقتی نیم آن موقعی است که قوس تغییر مضرب فرد π شود $Cos(2K+1)\pi = -1$ و چون قوس $\overset{\frown}{AH}$ مساوی $\frac{\pi}{2}$ یا $\frac{3\pi}{2}$ شود (یعنی انتهای آن بر نقطه B یا B' قرار گیرد) جیب تمام مساوی صفر میشود $Cos(K\pi + \frac{\pi}{2}) = 0$

از دستور (۲) معلوم میشود که جیب تمام از توابع متناوبه بوده و دوره تناوب آن 2π است پس تعیین تغییرات این تابع در یکدوره محیط کفایت میکند جدول تغییرات آن در یکدوره محیط چنین است

قوس	ربع اول		ربع دوم		ربع سوم		ربع چهارم	
x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$	2π
$Cos\, x$	+1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗ +1

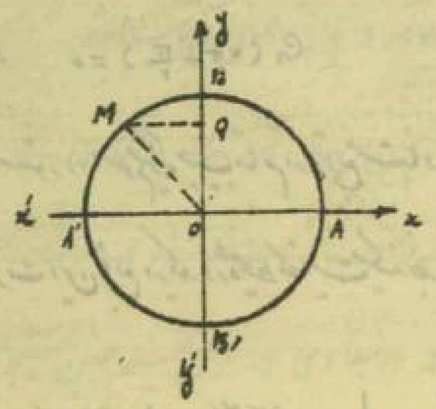
بوسیلهٔ این جدول بسهولت میتوان منحنی نمایش تغییرات تابع $y = Cos\, x$ را بازاء $0 \leq x \leq 2\pi$ رسم نمود



چنانکه بعد خواهیم دید در سطح این منحنی خطوط $x = k\pi$ محورهای تقارن منحنی و نقاط $\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ | ۰ مراکز تقارن آنند

۱۵- **جیب** Sinus - محور $y'y$ عمود بر $x'x$ را بطریقی اختیار میکنیم که

$\widehat{ox}, \widehat{oy} = +\frac{\pi}{2}$ باشد محور



فوق را محور جیب نامند

جیب قوس غیر مشخص $\overline{AH}$ عبارت

از تصویر قائم حامل oH بر محور $y'y$

است و یا عرض نقطه H نسبت بمحورهای مختصات $x'x$ و $y'y$ میباشد

جیب قوس را در این باب اختصار چنین نویسند sin و لذا $\sin \overline{AH} = \overline{oQ}$

پس $\overline{oQ}$ جیب قوسهائی است که مبدأ A و منتهای H باشند لذا نتیجه میشود

(۳) $\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha$

تغییرات جیب - مانند جیب تمام جیب قوس تیر همواره بین $+1$ و -1 واقع میباشد

ولی چون انتهای قوس در ربع های اول و دوم قرار گیرد جیب مثبت میشود و در دو ربع دیگر

جیب قوس منفی میگردد و ماکزیمم آن وقتی است که انتهای قوس بر نقطه B واقع شود

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = +1$ و می نیمم آن موقعی است که انتهای قوس بر نقطه B'

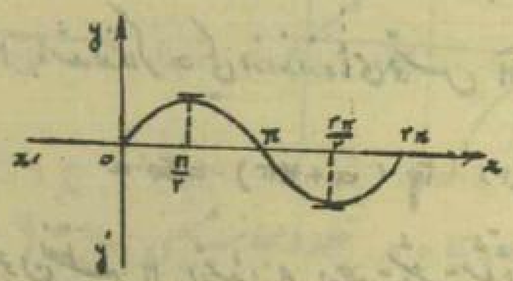
قرار گیرد $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) = -1$ و چون نقطه M بر A' یا A منطبق شود

جیب قوس صفر میشود $\sin k\pi = 0$

جیب قوس تیر از توابع متناوب بوده و دوره تناوب آن 2π میباشد

جدول منحنی نمایش تغییرات این تابع در یک دوره محیط چنین است

قوس		ربع اول		ربع دوم		ربع سوم		ربع چهارم	
x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\sin x$	0	↗	$+1$	↘	0	↘	-1	↗	0

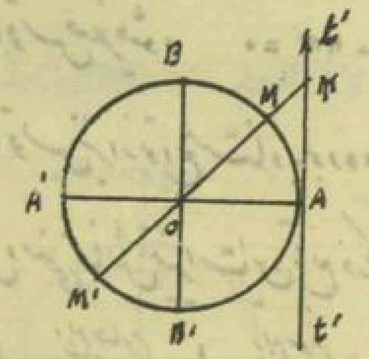


خطوط $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ محورهای تقارن این منحنی میباشند و نقاط $\left(k\pi\right)$ | ۰ مراکز تقارن آنند

تبصره - منحنی‌های نمایش تغییرات جیب و جیب تمام را سینوسین Sinusoïde نامند

۱۶- ظل Tangente - دوایر مثلثاتی تماس بر مبدأ A را محور ظل نامند و بر آن جهت از A به t (موافق جهت مثبت محور جیب) را جهت مثبت قرار داده‌اند

ظل قوس غیر مشخص $\overset{\frown}{AM}$ عبارت از



طولی است مانند $\overline{At}$ که مبدأ آن نقطه A و منتهایش محل تقاطع امتداد شعاع OM با tt' باشد

من باب اختصار ظل قوس a را چنین نویسند $tg\,a$

از تعریف فوق معلوم میشود که $\overline{At}$ ظل کلیه قوسهائی است که مبدأ A و منتهای M و یا قرینه مرکزی آن M' باشد لذا اگر a یکی از اندازه‌های قوس $\overset{\frown}{AM}$ باشد این تساوی حاصل است

$$tg\,(a+K\pi) = tg\,a \qquad (۴)$$

تغییرات ظل - چون نقطه M از مبدأ A در جهت مثبت مثلثاتی شروع بحرکت نماید ظل قوس $\overset{\frown}{AM}$ از صفر ترقی میکند و هرچه نقطه M به نقطه B نزدیک شود ظل قوس به

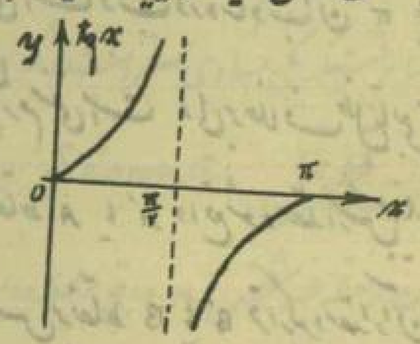
$+\infty$ میل میکند همینکه نقطه M داخل ربع دوم شود ظلش منفی میگردد ولی همواره در حال ترقی است زیرا هرچه نقطه M' به A' نزدیک شود ظل قوس از حد ترقی نموده به صفر میل میکند وچون نقطه M داخل ربع سوم و چهارم شود ظل قوس جمیع مقادیر قبلی را اختیار مینماید

ظل قوس برخلاف جیب و جیب تمام محدود نبوده و همواره تابعی است صعودی این تابع وقتی صفر میشود که انتهای قوس در نقاط A یا A' قرار گیرد یعنی $tg\,K\pi = 0$ و وقتی بینهایت است که انتهای آن بر نقاط B یا B' واقع شود یعنی $tg\,(\frac{\pi}{2}+K\pi) = \infty$

از دستور (۴) معلوم میشود که ظل قوس تابعی است متناوب و دور تناوب آن π میباشد

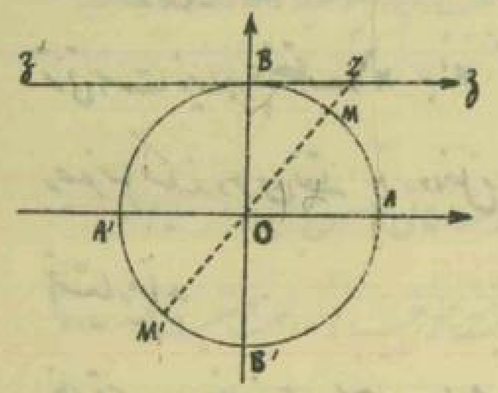
جدول و منحنی نمایش تغییرات این تابع بازاء $0 \leqslant x \leqslant \pi$ چنین میشود

قوس	ربع اول		ربع دوم	
x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$tg\,x$	0	$+1$	$+\infty$	$-\infty$ 0



خطوط $x = \frac{\pi}{2}+K\pi$ خطوط مجانب منحنی $y = tg\,x$ میباشند و نقاط $K\pi$ مراکز تقارن آنند

۱۷ـ **ظل تمام** Cotangente ـ برنقطه B مماس $z'z$ را موازی محور جیب تمام



و موافق جهت مثبت آن مرور داده

از محور ظل تمام نامیده اند

ظل تمام قوس $\overset{\frown}{AH}$ عبارت از

حامل $\overline{Bz}$ واقع بر $z'z$ است که

مبداء آن نقطه ثابت B و منتهای آن محل تقاطع امتداد شعاع OH با محور $z'z$

میباشد

من باب اختصار ظل تمام قوس a را چنین نویسند $\cot a$ ولذا نتیجه میشود

$$\cot(a+K\pi) = \cot a \quad (5)$$

تغییرات ظل تمام ـ ظل تمام تابعی است متناوب دوره تناوب آن π میباشد در

ربع اول و سوم مثبت و در ربع دوم و چهارم منفی است ولی برخلاف ظل تابعی است

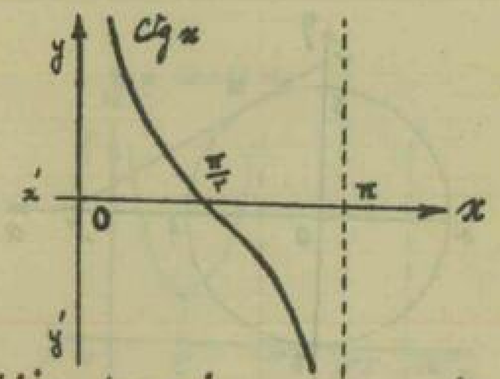
نزولی چون انتهای قوس $\overset{\frown}{AH}$ برنقاط A یا A' واقع شود مقدارش بینهایت میگردد

$\cot K\pi = \infty$ و چون انتهای قوس برنقاط B یا B' قرار گیرد مقدار آن مساوی

صفر میشود $\cot(K\pi+\frac{\pi}{2}) = 0$

جدول سختی تغییرات آن در یکدوره تناوب چنین است :

قوس	ربع اول		ربع دوم	
x	0	$\frac{\pi}{2}$		π
$\cot x$	$+\infty$ ↘	0	↘	$-\infty$ $+\infty$



خطوط مجانب سختی نمایش این تابع و نقاط $\frac{K\pi+\frac{\pi}{2}}{0}$

را اگر نقاط آنند

تبصره ـ از مقایسه تغییرات ظل و ظل تمام نتایج ذیل حاصل میشود :

اولاً ظل و ظل تمام یکقوس متحد العلامه اند

ثانیاً جهت تغییرات این دو تابع عکس یکدیگر است ظل همواره تابعی است صعودی در

صورتیکه ظل تمام تابعی است نزولی

ثالثاً وقتیکه یکی مساوی صفر است دیگری برابر بینهایت است

۱۸ـ **قطر ظل** Sécante **و قطر ظل تمام** Cosécante ـ

چون برنقطه غیر مشخص M واقع برمحیط دایره مثلثاتی مماسی رسم کنیم امتدادش محور جیب تمام

را در نقطه T و محور جیب را در نقطه S قطع مینماید حامل $\overline{OS}$ را قطر ظل و حامل

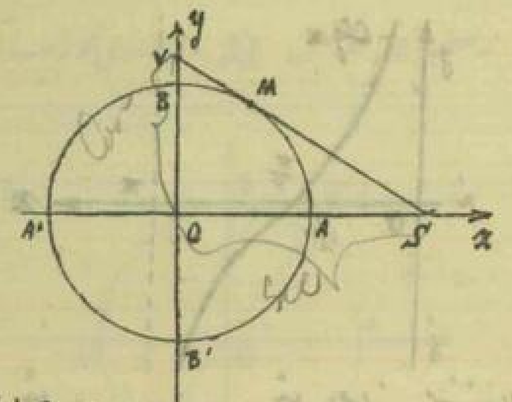
$\overline{OT}$ را قطر ظل تمام نامیده اند

PDF.tarikhema.org

من باب اختصار قطر ظل و قطر ظل تمام

قوس a را چنین نویسند $\text{Séc}\,a$

و $\text{Cosec}\,a$ دلذا

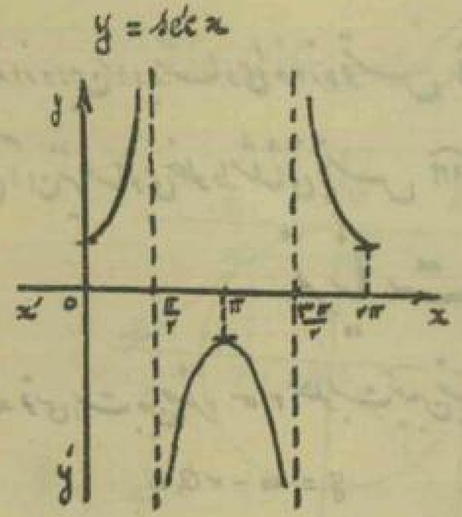


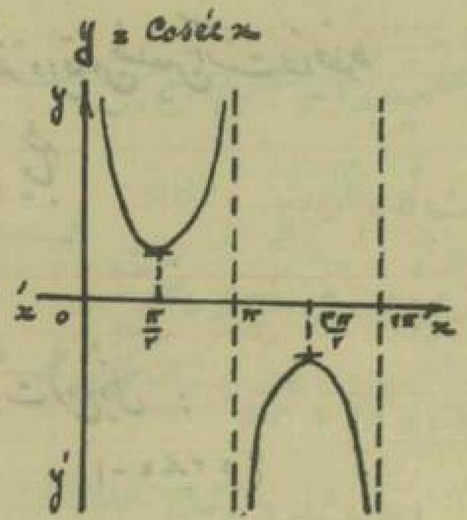
(۱) $\text{Cosec}(a+2k\pi) = \text{Cosec}\,a$ (۲) $\text{Séc}(a+2k\pi) = \text{Séc}\,a$

تغییرات قطر ظل و قطر ظل تمام – در ربع اول این دو تابع هر دو مثبتند چون نقطه M از A حرکت نموده در جهت مثبت به B نزدیک شود قطر ظل از $+1$ شروع بترقی مینماید در صورتیکه قطر ظل تمام از نهایت تنزل میکند همینکه نقطه M بر B منطبق شود قطر ظل بنهایت و قطر ظل تمام صفر میشود در ربع دوم قطر ظل منفی است در صورتیکه قطر ظل تمام مثبت میباشد ولی هر دو ترقی میکنند و چون نقطه M بر A' منطبق شود قطر ظل مساوی -1 و قطر ظل تمام برابر نهایت میگردد در ربع سوم هر دو تابع منفی میباشند ولی قطر ظل نزولی و قطر ظل تمام صعودی است و بالاخره در ربع چهارم قطر ظل تمام منفی است اما هر دو تابع نزولی میباشند

جدول ذیل نمایش تغییرات این دو تابع چنین است

قوس	ربع اول		ربع دوم		ربع سوم		ربع چهارم	
x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\text{Séc}\,x$	$+1$	$\nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow$		$-1 \searrow -\infty$		$+\infty \searrow +1$	
$\text{Cosec}\,x$	$+\infty \searrow +1$		$+\infty \nearrow$		$-\infty \searrow -1$		$-\infty \nearrow$	





تذکره – اولا قطر ظل و جیب تمام یک قوس و همچنین قطر ظل تمام و جیب مستقیم العلامه اند

ثانیا قطر ظل و قطر ظل تمام فقط جمیع مقادیر خارج $+1$ و -1 را اختیار میکنند

چنانکه بعد خواهیم دید میتوان بوسیله روابط بین این دو تابع و جیب و جیب تمام کلیه مطالب فوق را بسهولت استنباط نمود

۱۹ – خطوط مثلثاتی قوس – بر وفق تعاریف فوق هر قوس را برای یک جیب و یک جیب تمام و یک ظل و یک ظل تمام و یک قطر ظل و یک قطر ظل تمام میباشد که آنها را **خطوط مثلثاتی** آن قوس مینامند

۲۰ – خطوط مثلثاتی زاویه – نقطه O را رأس زاویه xOx' و xOH را مرکز قرار داده بشعاع واحد دایره رسم میکنیم نقاط A و H محل تقاطع محیط این دایره با ضلعین زاویه مفروض است

چون اندازه این زاویه مساوی اندازه قوس $\overset{\frown}{AH}$ واقع بین ضلعین آنست لذا خطوط مثلثاتی آن نیز مساوی خطوط مثلثاتی قوس $\overset{\frown}{AH}$ میباشد

تمرینات

۱۳ - x قوسی است بین صفر و ۲ مطلوبست تعیین تغییرات توابع ذیل :

$y = 3 - 2\cos x$ ، $y = -1 + 2\sin x$

$y = \sin^2 x - 3\sin x + 2$ ، $y = 3\tan x - 2$

۱۴ - بازاء چه مقادیری از x این روابط برقرارند :

$\cos\alpha = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4}$ ، $\cos\beta = \frac{3x - 1}{x^2 + 3x + 2}$

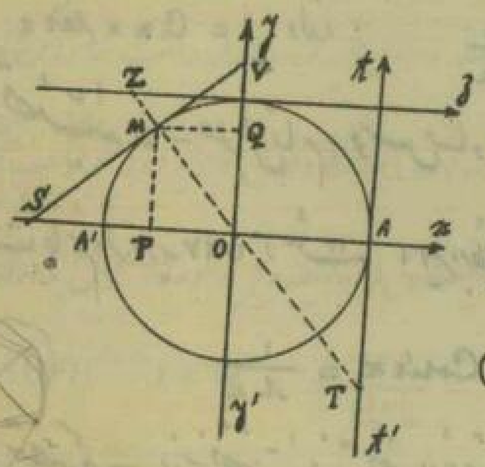
۱۵ - از نقطه H مماس SS' را بر دایره مثلثاتی رسم میکنیم و در روی این خط جهت مثبت را مخالف جهت مثبت دایره قرار داده فرض میکنیم H نقطه تقاطع امتداد شعاع OA با محور SS' باشد ثابت کنید که قطعه خط HH' مساوی ظل قوس $\overset{\frown}{AH}$ میباشد همچنین هرگاه P محل تقاطع شعاع OB عمود بر OA با محور SS' باشد ثابت کنید که قطعه خط HS مساوی ظل تمام قوس $\overset{\frown}{AH}$ است

۱۶ - مطلوبست رسم هندسی قوسی کوچکتر از ربع محیط درصورتیکه بدانیم و تر آن مساوی جیب تمامش میباشد

فصل سوم

۱ - روابط بین خطوط مثلثاتی یک قوس

۲۱ - قضیهٔ ۱ - مجموع مربع جیب و جیب تمام یک قوس مساوی واحد است



در مثلث قائم الزاویه OHP داریم

$$\overline{OP}^2 + \overline{PH}^2 = \overline{OH}^2$$

و از اینجا بقضیهٔ فیثاغورث این رابطه حاصل است

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \qquad (8)$$

۲۲ - قضیهٔ ۲ - ظل هر قوس مساوی نسبت جیب آن قوس بجیب تمام آنست

از تشابه دو مثلث قائم الزاویه OAT و OHP (رس ۱۲) نتیجه میشود

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{PH}}{\overline{OP}} \quad \text{و یا} \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad (9)$$

۲۳ - قضیهٔ ۳ - ظل تمام هر قوس مساوی نسبت جیب تمام آن قوس بجیب آنست

از دو تشابه دو مثلث OHQ و OZB (رس ۱۲) حکم محقق است $\frac{\overline{BZ}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{QH}}{\overline{OQ}}$

و یا

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \qquad (10)$$

۲۴ - نتیجه - ظل تمام هر قوس عکس ظل آن قوس است $\cot x = \frac{1}{\tan x}$ (11)

۲۵ - قضیهٔ ۴ - قطر ظل هر قوس عکس جیب تمام آن قوس است

در مثلث قائم‌الزاویه OMS (ش ۱۲) این رابطه حاصل است $\overline{OM}^2 = \overline{OP} \times \overline{OS}$

ویا $\sin x \times \csc x = 1$ ولذا $\csc x = \frac{1}{\sin x}$ (۱۲)

۲۶- **قضیهٔ ۵** - قطر ظل تمام هر قوس مساوی جیب آنقوس است

در مثلث قائم‌الزاویه OMT (ش ۱۳) نیز رابطهٔ حاصل است $\overline{OM}^2 = \overline{OQ} \times \overline{OT}$

ویا $\cos\csc x = \frac{1}{\sin x}$ (۱۳)

۲۷- **تبصره** - از پنج قضیهٔ فوق پنج رابطهٔ متمایز ذیل که بروابط اصلیه موسومند نتیجه میشود

$$R \begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \\ \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \\ \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \\ \sec x = \frac{1}{\cos x} \\ \cos\csc x = \frac{1}{\sin x} \end{cases}$$

بسهولت ملاحظه میشود که روابط دستگاه R از یکدیگر متمایز بوده یعنی هیچیک نمیتواند نتیجه ترکیب روابط دیگر باشد و بعلاوه نمیتوان رابطه متمایز دیگری غیر از روابط دستگاه فوق بین خطوط مثلثاتی یک قوس برقرار نمود چه در اینصورت این رابطه با روابط دستگاه R تشکیل شش معادله

شش مجهولی میدهند که از حل آن خطوط مثلثاتی قوس بدست آمده لذا قوس مشخص میگردد

وحال اگر روابط فوق عمومیت داشته و برای کلیه قوسها برقرار است بنابراین روابط دیگر مانند رابطهٔ (۱۱) و نظایر آن از روابط دستگاه فوق متمایز نبوده و نتیجه ترکیب آنها میباشند

۲۸- **روابط دیگر** - از روابط اصلیه فوق دو رابطهٔ ذیل که مورد استعمال زیاد دارند نتیجه میشود

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \quad (۱۴)$$

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} = \cos\csc^2 x \quad (۱۵)$$

۲۹- **مورد استعمال روابط فوق** - بوسیلهٔ روابط اصلیه میتوان مسئلهٔ ذیل را حل نمود

یکی از خطوط مثلثاتی قوسی معلوم است مطلوبست محاسبهٔ سایر خطوط مثلثاتی آن

بارغایت معلوم بودن یکی از خطوط مثلثاتی دستگاه R تشکیل دستگاه پنج مجهولی را میدهد که بسهولت از حل آن میتوان سایر خطوط مثلثاتی را تعیین نمود

مثال ۱ - مطلوبست محاسبهٔ خطوط مثلثاتی قوسی که جیب تمامش معلوم باشد

از رابطهٔ اول دستگاه R نتیجه میشود $\sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}$ ولذا $\tan x = \frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$

و $\cot x = \frac{\pm\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$ ، $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ ، $\cos\csc x = \frac{\pm 1}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$

از این دستورات معلوم میشود که باستثنای قطر ظل برای سایر خطوط مثلثاتی قوس دو مقدار مساوی

ومختلف العلامه حاصل میشود

مثال ۲ - مطلوبست محاسبه خطوط مثلثاتی قوسی که خلش معلوم است

از دستور (۱۴) حاصل میشود $\cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$ و $\sec x = \pm \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}$

ولذا از روابط دستگاه R نتیجه میشود $\sin x = \frac{\pm \operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$

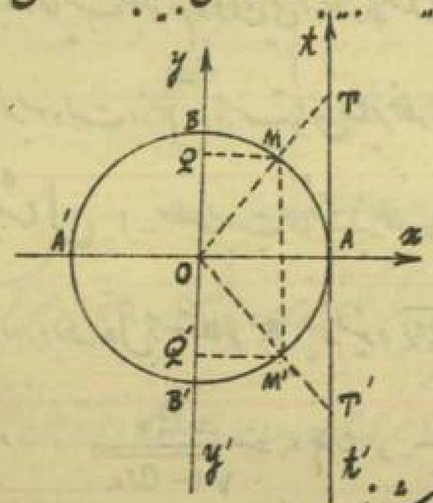
چنانکه ملاحظه میشود باستثنای $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ و $\operatorname{cosec} x = \pm \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}{\operatorname{tg} x}$

ظل تمام برای سایر خطوط دو مقدار قرینه نتیجه میشود

تبصره - مسئله فوق را بوجوه هندسی نیز نمیتوان حل نمود

ب - روابط بین خطوط مثلثاتی قوسهای قرینه ومکمل ومتمم وغیره

۳۰ - قضیه - دو قوس قرینه دارای یک جیب تمامند ولی جیب وظلشان مساوی ومختلف العلامه است



چون دو انتهای قوسهای قرینه $\widehat{AM}$ و $\widehat{AM'}$ نسبت بقطر AA' قرینه‌اند (نمره ۵) لذا نقاط Q و Q' و همچنین M و M' نسبت باین قطر قرینه یکدیگر میباشند پس:

$$(۱۷)\quad \begin{cases} \cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x \\ \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x \end{cases}$$

بوسیله این روابط با ملاحظه دستگاه R معلوم میشود که دو قوس قرینه دارای یک قطر ظلند ولی قطر ظل تمام وظل تمامشان مساوی ومختلف العلامه است

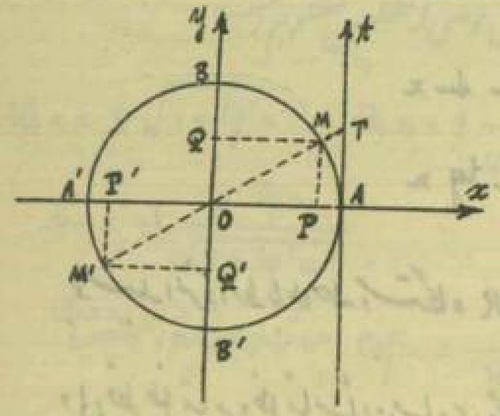
۳۱ - قضیه - دو قوس متکمل دارای یک جیبند ولی جیب تمام وظلشان مساوی ومختلف العلامه است

دو انتهای قوسهای متکمل $\widehat{AM}$ و $\widehat{AM'}$ نسبت بقطر BB' قرینه نیباشند (نمره ۷) لذا بسهولت معلوم میشود که نقاط P و P' نسبت باین قطر و نقاط M و M' نسبت بقطر AA' قرینه نیباشند پس:

$$(۱۸)\quad \begin{cases} \cos(\pi - x) = -\cos x \\ \sin(\pi - x) = \sin x \\ \operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x \end{cases}$$

PDF.tarikhema.org

۳۲- **قضیه** - دو قوس که اختلافشان نصف محیط دایره باشد دارای یک ظل و یک جیب



وجیب تمامشان مساوی و مختلف العلامه است

موافق (نمرهٔ ۸) انتهای این دو

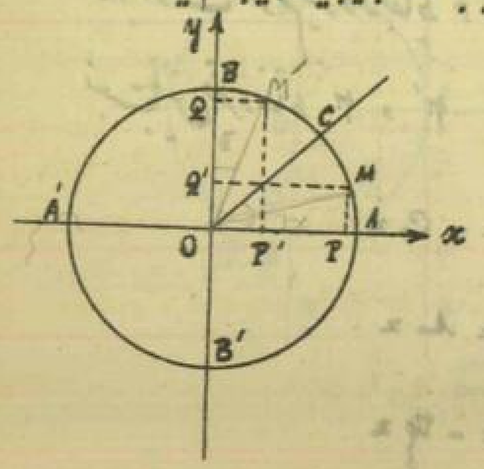
قوس نسبت بمرکز دایره قرینه اند پس ظل

هر دو قوس حامل $\overline{AH}$ میباشد ولی چون

نقاط P و M و همچنین Q و Q' نسبت بمرکز دایره قرینه اند لذا

$$\begin{cases} \cos(\pi+x) = -\cos x \\ \tan(\pi+x) = -\tan x \\ \cot(\pi+x) = \cot x \end{cases} \quad (19)$$

۳۳- **قضیه** - هرگاه دو قوس متمم یکدیگر باشند جیب یکی جیب تمام دیگری و ظل یکی ظل تمام دیگری است



دو قوس $\widehat{AH}$ و $\widehat{AH'}$ متمم یکدیگرند

لذا مجموعشان $\frac{\pi}{2}$ و نصف مجموعشان

$\frac{\pi}{4}$ است پس قوس $\widehat{AC}=\frac{\pi}{4}$ و داریم

حدی دو قوس متمم بوده و انتهایش وسط قوس $\widehat{MM'}$ میباشد حال اگر شکل را حول

OC منصف الزاویه ربع اول دوران دهیم تا شعاع OB بر OA قرار گیرد چون نقطه

M بر M' منطبق میشود لذا خط M'Q' بر MP واقع میگردد و از اینجا نتیجه میشود که

$\overline{PM} = \overline{Q'M'}$ و $\overline{OP} = \overline{OQ'}$ ولذا

$$\begin{cases} \cos(\frac{\pi}{2}-x) = \sin x \\ \sin(\frac{\pi}{2}-x) = \cos x \\ \tan(\frac{\pi}{2}-x) = \cot x \end{cases} \quad (20)$$

۳۴- **تبصره ۱** - از روابط (۲۰) معلوم میشود که جیب تمام و ظل تمام و قطر ظل تمام هر قوس عبارت از جیب و ظل و قطر ظل متمم این قوسند و وجه تسمیه آنها بمناسبت همین خاصیت است چنانکه cosinus - cos عبارت از اختصار جیب متمم است

۳۵- **تبصره ۲** - بوسیلهٔ روابط فوق میتوان رابطی بین خطوط مثلثاتی دو قوس که اختلافشان $\frac{\pi}{2}$ باشد برقرار نمود

میدانیم که دو قوس $-x$ و $\frac{\pi}{2}+x$ متمم یکدیگرند لذا :

$$\cos(\frac{\pi}{2}+x) = \sin(-x)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos(-x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin(-x)$$

با ملاحظه روابط (۱۷) نتیجه میشود :

$$\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x\\ \tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\cot x\end{cases}\qquad(۲۱)$$

۳۶- **مسئله** - مطلوبست تحویل قوسی بربع اول

چنانکه بعد خواهیم دید در حل مسائل عملی مجبوریم که بوسیله جداول لگاریتمی که شامل خطوط مثلثاتی قوسهای بین صفر و ۹۰ درجه است خطوط مثلثاتی هر قوس را حساب کنیم پس مقصود از حل مسئله فوق آنست که بفرض معلوم بودن قوس α قوسی محصور بین صفر و ۹۰ درجه قسمی تعیین کنیم که بر حسب مقدار مطلق خطوط مثلثاتی آن با خطوط مثلثاتی قوس α مساوی باشد در اینصورت با رعایت علامت خطوط مثلثاتی قوس α بدست میآید فرض میکنیم α اندازهٔ قوسی بر حسب ادیان باشد برای تحویل این قوس بقوسی واقع در ربع اول ابتدا آنقدر مضرب ۲π از α نقصان و یا بر آن اضافه میکنیم تا حاصل قوسی بدست آید

α واقع بین صفر و ۲π شود واضح است که خطوط مثلثاتی دو قوس α و α مساوی بدین حال اگر

اولاً $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ باشد قوس α جواب مسئله است

ثانیاً $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ در اینصورت مکمل این قوس جواب مسئله میباشد

ثالثاً $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ در اینحال $\alpha-\pi$ قوسی است واقع در ربع اول

رابعاً $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ در اینصورت قوس $2\pi-\alpha$ جواب مسئله است

مثال ۱ - قوس $\frac{17\pi}{3}$ را بربع اول تحویل کنید -

$\frac{5\pi}{3}+4\pi=\frac{17\pi}{3}$ قوس $\frac{5\pi}{3}$ بین $\frac{3\pi}{2}$ و 2π واقع است پس قوس

$\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}-2\pi$ جواب مسئله میباشد در اینحال $\cos\frac{17\pi}{3}=\cos\frac{\pi}{3}$ و

$\tan\frac{17\pi}{3}=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ و $\sin\frac{17\pi}{3}=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

مثال ۲ - قوس -500 درجه را بربع اول تحویل کنید

$-500^\circ+220^\circ=-280^\circ$ - وچون $270^\circ<280^\circ<360^\circ$ لذا قوس $360^\circ-180^\circ=220^\circ$

جواب مسئله است پس : $\cos(-500^\circ)=-\cos 40^\circ$ و $\tan(-500^\circ)=-\tan 40^\circ$

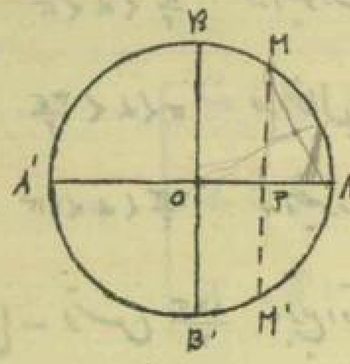
و $\sin(-500^\circ)=-\sin 40^\circ$

۳۷- **محاسبهٔ خطوط مثلثاتی قوسهای** $n\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ - اگر بتوانیم کثیر الاضلاع منتظمی که شامل دایره

ضلع باشد در دایره محاط کنیم در اینصورت بسهولت قضیه ذیل و نتیجه آن بسهولت خطوط مثلثاتی

قوس $\frac{\pi}{2n}+k$ را که در آن n و k اعدادی صحیح‌اند حساب نمود

۳۸- قضیه - در دایره مثلثاتی جیب قوس محصور بین صفر و $\frac{\pi}{2}$ مساوی نصف وتر قوس مضاعف آنست -



چون عمود MP را امتداد دهیم محیط دایره را در نقطه M' قرینه نقطه M قطع میکند لذا :

$$\text{Arc } \widehat{AM} = \widehat{PM} = \frac{\widehat{M'M}}{2}$$

۳۹- نتیجه - جیب قوس $\frac{\pi}{2n}$ مساوی نصف ضلع کثیرالاضلاع منتظم n ضلعی محاطی است

و بطور کلی جیب قوس $\frac{\pi}{2n}+k$ (k عددی است صحیح مستباین با n و کوچکتر از $\frac{n}{2}$) مساوی نصف ضلع کثیرالاضلاع منتظم کوکبی است که دارای n ضلع بوده دهر وتر شامل k قوس از محیط دایره باشد

۴۰- موارد استعمال - محاسبه خطوط مثلثاتی بعضی از زوایها

۱- در دایره مثلثاتی ضلع مربع محاطی ($n=4$) مساوی $\sqrt{2}$ است لذا

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45^\circ = \sin \frac{\pi}{4}$ بوسیله دستگاه R معلوم میشود که $\cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{1-\sin^2 \frac{\pi}{4}}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}$ (چون انتهای قوس $\frac{\pi}{4}$ در ربع اول است لذا خطوط مثلثاتی آن مثبت میباشد)

و $\tan \frac{\pi}{4} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = 1$

۲- ضلع مثلث منتظم محاطی ($n=3$) در دایره بشعاع واحد مساوی $\sqrt{3}$ است

لذا $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ = \sin \frac{\pi}{3}$ و از آنجا $\cos \frac{\pi}{3} = \sqrt{1-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$ و

$\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

۳- ضلع مسدس منتظم محاطی ($n=6$) در دایره مثلثاتی برابر واحد است پس

$\frac{1}{2} = \sin 30^\circ = \sin \frac{\pi}{6}$ و از آنجا $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

۴- اندازه ضلع متعشر محاطی ($n=10$) در دایره مثلثاتی مساوی $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ است پس

$\frac{\sqrt{5}-1}{4} = \sin 18^\circ = \sin \frac{\pi}{10}$

و اندازه ضلع متعشر کوکبی ($n=10$ و $k=3$) برابر $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ است پس

$\frac{\sqrt{5}+1}{4} = \sin 54^\circ = \sin \frac{3\pi}{10}$

۵- اندازه ضلع مخمس منتظم ($n=5$) در دایره مثلثاتی مساوی $\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

است لذا : $\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = \sin 36^\circ = \sin \frac{\pi}{5}$

و ضلع مخمس کوکبی ($n=5$ و $k=2$) بطول $\frac{1}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

میباشد پس :

PDF.tarikhema.org

$$\sin\frac{2\pi}{5} = \sin 72^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

تبصره - قوسهای $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{\pi}{4}$ و همچنین $\frac{\pi}{10}$ و $\frac{2\pi}{15}$ و همچنین $\frac{3\pi}{10}$ و $\frac{\pi}{15}$ متمم یکدیگرند لذا میتوان خطوط مثلثاتی یکی را بوسیله معلوم بودن خطوط مثلثاتی قوس متمم دیگر حساب نمود

پس $\sin\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و

$$\cos\frac{\pi}{10} = \sin\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

$$\cos\frac{2\pi}{10} = \sin\frac{\pi}{5} = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

$$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{2\pi}{10} = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$$

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \sin\frac{\pi}{10} = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$$

خلاصهٔ مطالب فوق را میتوان از جدول ذیل استنباط نمود.

	$\frac{\pi}{4}$ (45)	$\frac{\pi}{3}$ (60)	$\frac{\pi}{6}$ (30)	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{3\pi}{10}$
sin	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$
cos	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$
tag	1	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$

ج - منعکس خطوط مثلثاتی

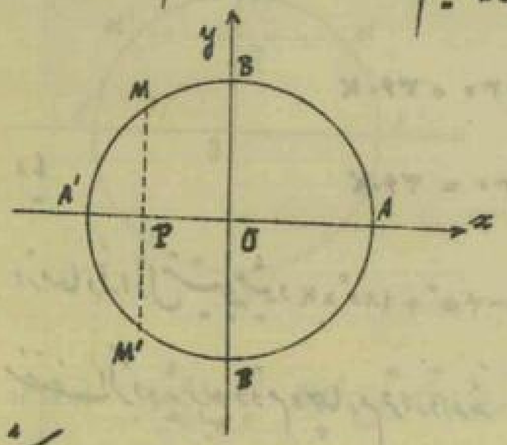
۴۱ - **مسئله کلی** - مطلوبست تعیین قوسهائیکه یکی از خطوط مثلثاتی آن معلوم باشد

حل این مسئله بدو قسمت تقسیم میشود:

اولاً تعیین قوسی که جواب مسئله باشد (در این مبحث فقط بحل هندسی آن اکتفا میشود)

ثانیاً تعیین سایر قوسها

۴۲ - **منعکس جیب تمام** - فرض میکنیم $\cos x = a$ - جیب تمام قوس x باشد



برای تعیین این قوس بر محور جیب تمام حامل $\overline{OP}$ را برابر a جدا نموده از انتهای P عمود MM' را بر قطر AA' اخراج میکنیم قوسهای مبدأ A که بنقاط M و M' منتهی شده اند جواب مسئله میباشند

فرض میکنیم α یکی از اندازه‌های قوس AM باشد لذا اندازه قوس AM' مساوی $-\alpha + 2k\pi$ است پس کلیهٔ اندازه‌های قوس مجهول x که بدو نقطه M و M' منتهی شده اند چنین است $x = \pm\alpha + 2k\pi$ (قوس x را

$\arc C_a$ یعنی قوسی که جیب تمامش a است) یعنی

از رابطهٔ فوق با مراجعه بنمرات (۳) و (۵) نتیجهٔ ذیل حاصل میشود :

شرط لازم و کافی برای اینکه دو قوس x دارای یک جیب تمام باشند آنستکه مجموع یا تفاضل اندازه‌های این دو قوس مضرب صحیح (مثبت یا منفی یا صفر) زوج π باشد

مثال - مطلوبست حل معادلهٔ $C_{(3x+30^\circ)} = C_{(2x-40^\circ)}$

برای اینکه دو قوس $(2x-40^\circ)$ و $(4x+30^\circ)$ دارای یک جیب تمام باشند باید :

$$4x + 30^\circ - 2x - 40^\circ = 360^\circ K$$

یا

$$-4x - 30^\circ - 2x + 40^\circ = 360^\circ K$$

از معادلهٔ اول نتیجه میشود $x = 180^\circ K + 45^\circ$ در اینحال انتهای قوسهای x بر نظر منصف الزاویهٔ ربع دوم و چهارم قرار دارند

از معادلهٔ دوم حاصل میشود $x = -180^\circ K - 15^\circ$ حال اگر K مضارب 3 را اختیار کند انتهای قوس x تغییر نمیکند و چون به K مقادیر 0 و 1 و 2 و 3 و 4 و 5 داده شود انتهای قوسهای x بر روی شش ضلعی منتظم محاطی که یک رأسش از مبدأ A بفاصلهٔ 5 درجه واقع است قرار خواهند گرفت

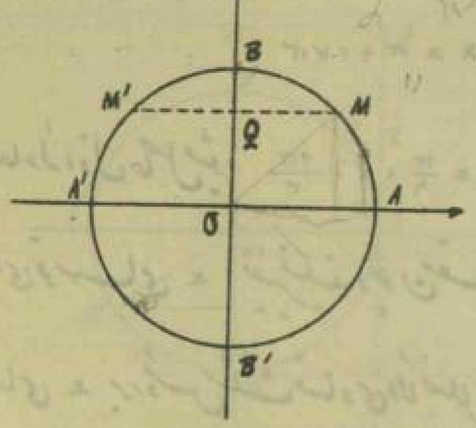
۴۳- **حالات خاص** - اگر $C_x = 1$ باشد انتهای قوسهای x بر مبدأ A واقع میشوند

در اینصورت $\arc C_1 = 2K\pi$

اگر $C_x = -1$ باشد انتهای قوسهای x بر نقطهٔ A' قرار خواهند داشت در اینحال

$\arc C_{-1} = (2K+1)\pi$

۴۴- **منعکس جیب** - اگر $-1 < a < 1$ جیب قوس x باشد برای تعیین این دو قوس



از محور $\overline{BB'}$ حامل $\overline{OQ}$ را برابر a جدا نموده از انتهای φ عمود MM' را بر قطر BB' اخراج میسنمائیم فرض میکنیم α یکی از اندازه‌های قوس $\overline{AM}$ باشد لذا اندازهٔ قوس AM' چنین میشود $\pi - \alpha$

پس کلیهٔ قوسهائی که جیبشان $\overline{OQ}$ است چنین اند :

$$\arc \sin a = \alpha + 2K\pi$$

$$\arc \sin a = \pi - \alpha + 2K\pi$$

لذا نتیجهٔ ذیل حاصل میشود :

شرط لازم و کافی برای اینکه دو قوس دارای یک جیب باشند آنستکه تفاضلشان مضرب زوج π و یا مجموعشان مضرب فرد π باشد

مثال - مطلوبست حل معادله $\sin(4x - \frac{\pi}{3}) = \sin x$

برای اینکه دو قوس x و $(4x - \frac{\pi}{3})$ دارای یک جیب باشند باید:

$$4x - \frac{\pi}{3} - x = 2K\pi$$

و یا

$$4x - \frac{\pi}{3} + x = \pi + 2K\pi$$

از معادلهٔ اول حاصل میشود $x = \frac{\pi}{9} + K \cdot \frac{2\pi}{3}$ در اینصورت اگر K مضرب ۳ باشد انتهای قوسهای x تغییر نمیکند و چون مقادیر ۰ و ۱ و ۲ را اختیار نماید انتهای قوسهای x بر رئوس مثلث متساوی الأضلاع محاطی که رأس آن از مبدأ با فاصلهٔ $\frac{\pi}{9}$ است واقع میشوند

از معادلهٔ دوم نتیجه میشود $x = \frac{4\pi}{15} + K \cdot \frac{2\pi}{5}$ در اینصورت بسهولت معلوم میشود که انتهای قوسهای x بر رئوس مخمس تنتظمی واقع خواهند بود

۴۵ - حالات خاص - اگر $\sin x = 1$ یا انتهای قوسهای x بر نقطه B واقع میشود در اینصورت

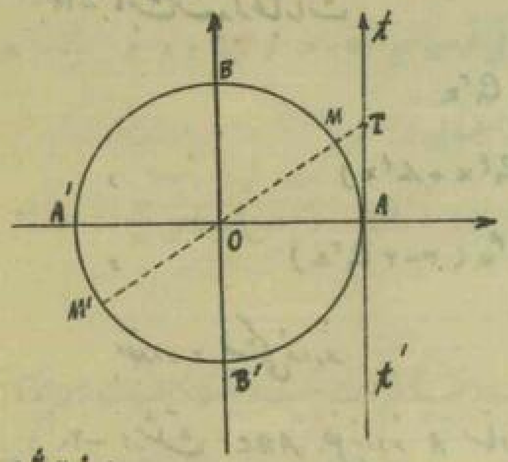
$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2} + 2K\pi$$

اگر $\sin x = -1$ یا انتهای قوسهای x بر نقطه B' قرار میگیرند در اینحال

$$\arcsin -1 = -\frac{\pi}{2} + 2K\pi$$

۴۶ - منعکس ظل - فرض میکنیم مطلوب حل معادله $\tan x = a$ باشد

از نقطه A بر محور ظل قطعه $\overline{AH}$ را برابر a جدا نموده نقطه H را بمرکز دایره وصل میکنیم و فرض مینمائیم نقاط H و H' محل تقاطع این خط با محیط دایره باشد کلیه قوسهائیکه بنقاط H یا H' منتهی شده باشند ظلشان $\overline{AH}$ است حال اگر α یکی از اندازه‌های قوس $\widehat{AH}$ باشد کلیه اندازه‌های قوسهای $\widehat{AH}$ و $\widehat{AH'}$ از رابطهٔ ذیل معلوم میشود $\arctan a = \alpha + K\pi$ پس چنین نتیجه میشود



شرط لازم و کافی برای اینکه دو قوس دارای یک ظل باشند آنستکه تفاضلشان مضرب صحیح π باشد

مثال - مطلوبست حل معادلهٔ $\tan(2x + 52^\circ) = \tan(7x + 12^\circ)$

از این معادله نتیجه میشود $K \cdot 200^\circ = -3x - 52^\circ + 7x + 12^\circ$ جواب این معادله

گراد گراد
۰.۵۰+ ۱۰ = x میباشد

حال اگر x مضرب ۸ باشد انتهای قوس x ثابت میماند ولی اگر بترتیب مقادیر صحیح از صفر تا ۷ را اختیار کند انتهای قوسهای x برروس ۸ ضلعی منتظم محاطی که یک رأس آن بفاصله ۱۰ گراد از مبدء A واقع است قرار خواهند داشت

تمرینات

۱۷- جیب قوسی مساوی $\frac{4}{5}$ است مطلوبست محاسبهٔ سایر خطوط مثلثاتی آن

۱۸- مطلوبست محاسبهٔ خطوط مثلثاتی قوسی که اولاً جیب و ثانیاً قطر ظل آن معلوم باشد

۱۹- ثابت کنید که عبارات

$$\sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x \cos^2 x$$

و $2(\cos^4 x + \sin^4 x) - 3(\cos^2 x + \sin^2 x)$

و $\sin^4 x(3 - 2\sin^2 x) + \cos^4 x(3 - 2\cos^2 x) - 2$

بمقدار x بستگی ندارند

۲۰- در مثلث ABC ظل زاویهٔ A مساوی $-\frac{3}{2}$ است مطلوبست محاسبهٔ جیب و جیب تمام این زاویه

۲۱- هرگاه x زاویهٔ حاده و a و b دو عدد مثبت باشند مطلوبست محاسبهٔ $\cos x$

و $\tan x$ درصورتیکه $\cos x = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$

۲۲- صحت اتحادهای ذیل را تحقیق کنید

$$\sin^2 x - \sin^2 y = \frac{1}{1+\cot^2 y} - \frac{1}{1+\cot^2 x}$$

$$\cot^2 x \cdot \cos^2 x = \cot^2 x - \cos^2 x$$

$$\frac{\tan x + \tan y}{\cot x + \cot y} = \tan x \cdot \tan y$$

$$\sec^2 x \cdot \operatorname{cosec}^2 x = \sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x$$

$$\frac{\cos^2 x - \sin^2 y}{\sin^2 x \sin^2 y} = \cot^2 x \cot^2 y - 1$$

۲۳- x زاویهٔ حاده و a و b دو عدد مثبت باشند مطلوبست محاسبهٔ عبارت $\frac{a}{\cos x} + \frac{b}{\sin x}$ درصورتیکه $\tan x = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$

۲۴- مطلوبست محاسبهٔ خطوط مثلثاتی قوسهای $x + 5\pi$ و $x + \frac{3\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2} - x$ و $x + \frac{7\pi}{2}$ برحسب خطوط مثلثاتی قوس x

۲۵- قوسهای $213^\circ 20'$ و $(12^\circ 22' 30'' - 10^\circ)$ - و همچنین قوسهای $22\frac{\pi}{3}$ و -3 و $\frac{355}{113}$ را بربع اول تحویل کنید

۲۶- منحنی های نمایش تغییرات جیب و جیب تمام نسبت بیک دستگاه مختصات رسم شده است اولاً مطلوبست مختصات نقاط تقاطع این دو منحنی ثانیاً ثابت کنید که میتوان بوسیلهٔ یک حرکت انتقالی این دو منحنی را بر هم منطبق نمود

۲۷- خطوط مثلثاتی قوسهای $\frac{\pi}{8}$ و $\frac{\pi}{16}$ و $\frac{\pi}{15}$ و $\frac{2\pi}{15}$ و $\frac{4\pi}{15}$ و $\frac{7\pi}{15}$ را حساب کنید

۲۸- در دایرهٔ مثلثاتی نقاط M و M' انتهای قوسهای متحد المبدأ a و b میباشند میدانیم که وتر MM' از حیث طول برابر $2\sin\frac{a-b}{2}$ است ثابت کنید

که $\overline{AA'}^2 = (\cos a - \cos b)^2 + (\sin a - \sin b)^2$

و از این تساوی صحت روابط ذیل را تحقیق کنید :

$$1 - 2\sin^2 \frac{a-b}{2} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$1 - 2\sin^2 \frac{a}{2} = \cos a$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

۲۹ـ مطلوبست تعیین قوسهائیکه جیب تمامشان بترتیب مساوی جیب تمام قوسهای ذیل باشد

200^g و -50^g و $\frac{11\pi}{6}$

۳۰ـ مطلوبست تعیین قوسهائیکه جیبشان بترتیب مساوی جیب قوسهای ذیل باشد $\sin 10^g$

و 550^g و $\frac{9\pi}{4}$

۳۱ـ مطلوبست تعیین قوسهائیکه ظلشان بترتیب مساوی ظل قوسهای ذیل باشد $\tan 10^g$

و 120^g و $\frac{11\pi}{4}$

۳۲ـ اعداد صفر و $\frac{1}{2}$ و $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ و -1 ـ مفروضند مطلوبست تعیین قوسهائیکه

اعداد فوق اولاً جیب تمام ثانیاً جیب آن باشد

۳۳ـ اعداد صفر و $\frac{\sqrt{3}}{3}$ و -1 و $\sqrt{3}$ مفروضند مطلوبست تعیین قوسهائیکه اعداد فوق

اولاً ظل ثانیاً ظل تمام آنها باشد

۳۴ـ هرگاه x یکی از ریشه‌های معادله $\tan x = a$ باشد مطلوبست موضع انتهای قوسهای

ma و $\frac{x}{n}$ (هرگاه m و n اعدادی صحیح باشند)

۳۵ـ مسئله فوق هرگاه x ریشهٔ معادله $\sin x = a$ باشد

۳۶ـ اگر در مثلث ABC رابطهٔ $\sin A \sin B = 1$ برقرار باشد نوع مثلث را معلوم کنید

۳۷ـ مطلوبست حل معادلات ذیل :

$$\cos x = -\cos 10^g$$

$$\tan x = -\cot a$$

$$\sin(ax+b) = \sin(cx+d)$$

$$\tan \frac{x+a}{x-a} = \tan \frac{x+b}{x-b}$$

$$\begin{cases} \cos 2x + \sin x = 0 \\ -200^g < x < 100^g \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \pi(x^2 - 2x + 1) = \sin \pi(x^2 + 2) \\ -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan \pi(x^2+1) = \tan \pi x \\ -\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\tan x \cdot \cot 2x = \tan 2x \cot x$$

$$\tan 2x \cdot \tan 3x = 1$$

۳۸ـ دستگاههای ذیل را حل کنید :

$$\begin{cases} \sin x = \sin 2y \\ \cos x = \sin y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x + \cos\left(\frac{\pi}{2} + y\right) = 0 \\ |x| + |y| = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(x-y) = \frac{1}{2} \\ \cos(x-y) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(x+y) = \cos(x-y) \\ \tan \frac{3x-5y}{3} = \tan(3x+2y-7) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(x-y) = \sin(x+y-1) \\ \tan(3x-y) = \tan \frac{2x+5y}{3} \end{cases}$$

۳۹ـ اگر a عدد مثبت باشد ثابت کنید که بازاء جمیع مقادیر مثبت x روابط ذیل برقرارند

PDF.tarikhema.org

$$\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+a}} = \arccos\sqrt{\frac{a}{x+a}}$$

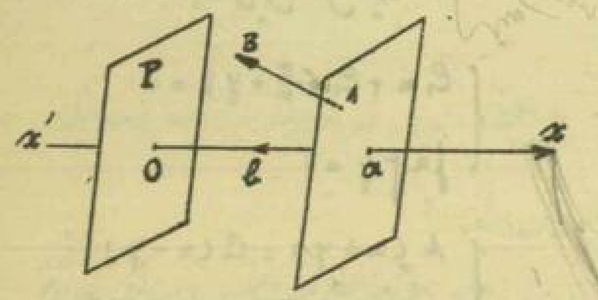
$$\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+a}} = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{a}}$$

$$\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-a}{x+a}} = \arcsin\sqrt{\frac{x-a}{2x}}$$

فصل چهارم - جمع توسها

۱- تصاویر

۴۷- تعریف - صفحهٔ ? و محور $x'x$ غیرموازی با آن مفروض است بر نقطه فضائی A صفحهٔ موازات صفحه ? رسم میکنیم نقطه a محل تقاطع این صفحه با محور مفروض را تصویر نقطه A گویند



تصویر هر حامل بر هر محور حاملی است که مبدا و انتهای تصویر مبدا و انتهای حامل مفروض و منتهایش تصویر انتهای آن باشد تصویر حامل (AB) را بر محور چنین نویسند $\text{proj}_{x'x}^{(AB)} = \overline{ab}$

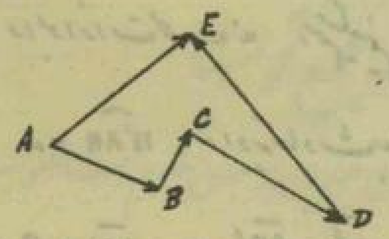
در صورتیکه حامل تصویر در جهت مثبت محور و یا در خلاف جهت آن باشد جهت آن مثبت و یا

منفی خواهد بود بطوریکه تصویر هر حامل بر محور کمیتی است جبری و بنابراین با اعداد جبری اندازه گرفته میشود

اگر صفحه ? عمود بر محور نباشد تصویر را قائم خوانند

۴۸- قضیه - چون چندین حامل را بر یک محور تصور کنیم مجموع جبری این تصاویر مساوی تصویر منتجهٔ حاملهاست

از نقطهٔ غیر مشخص A حاملهای AB و BC و CD و DE را بهمنگ حاملهای



مفروض رسم میکنیم میدانیم که حامل AE منتجهٔ حاملهای مفروض خواهد بود اگر نقاط a و b و c و d و e بترتیب تصاویر نقاط A و B و C و D و E بر محور $x'x$ باشند بموجب قضیه مثال نتیجه میشود :

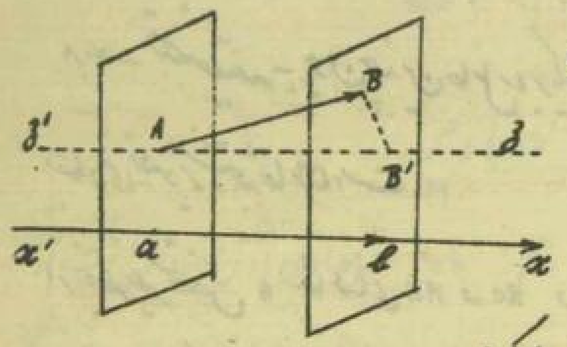
$$\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{cd} + \overline{de} + \overline{ea} = 0$$ و یا :

$$\overline{ae} = \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{cd} + \overline{de}$$ و چون حامل $\overline{ae}$ تصور منتجه است لذا

حکم محقق میباشد

۴۹- **قضیه**- چون خاطی بطول ۱+ را بر سه محور قائماً تصویر کنیم اندازه تصویر مساوی جیب تمام زاویه حادث بین جهت مثبت خاط و امتداد مثبت محور میباشد-

فرض میکنیم خاط (AB) بطول واحد و تصویرش بر محور $x'x$ خط حامل $\overline{ab}$ باشد از نقطه A خط $z'z$ را بموازات محور $x'x$ رسم میکنیم

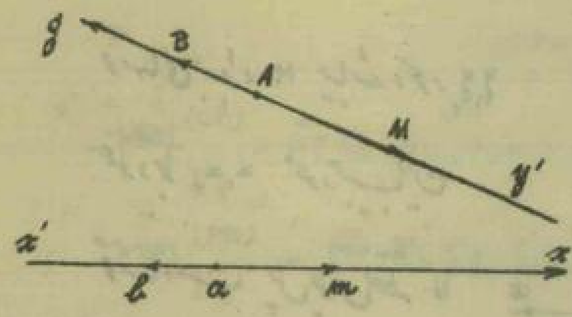


زاویه $\alpha = B'AB$ زاویه حادث بین دو جهت مثبت خاط و محور $x'x$ میباشد

چون $AB' = C_\alpha$ و $\overline{ab} = \overline{AB'}$ پس $\overline{ab} = C_\alpha$

۵۰- **نتیجه**- چون خاطی را بر محور معلوم الجهت متکی فرض کنیم تصویر قائم این خاط بر هر محور مساوی است با اندازه جبری خاط در جیب تمام زاویه حادث بین جهت مثبت محور و جهت مثبت محل خاط

فرض میکنیم محور $y'y$ محل خاط (AM) باشد بر محور $y'y$ خاط $\overline{AB}$ را بطول ۱+ جدا نموده اگر تصاویر قائم خاطهای $\overline{AM}$ و $\overline{AB}$ بر محور $x'x$ بترتیب خاطهای



$\overline{am}$ و $\overline{ab}$ باشد چنین نتیجه میشود $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{am}}{\overline{ab}}$

و چون $\overline{ab} = C_\alpha$ و $\overline{AB} = +1$ لذا $\overline{am} = \overline{AM}\, C_\alpha$

و نیز نتیجه فوق را چنین بیان نمود:

تصویر قائم هر خاط بر هر محور مساوی است با طول خاط نفروض در جیب تمام زاویه حادث بین جهت مثبت خاط و امتداد مثبت محور

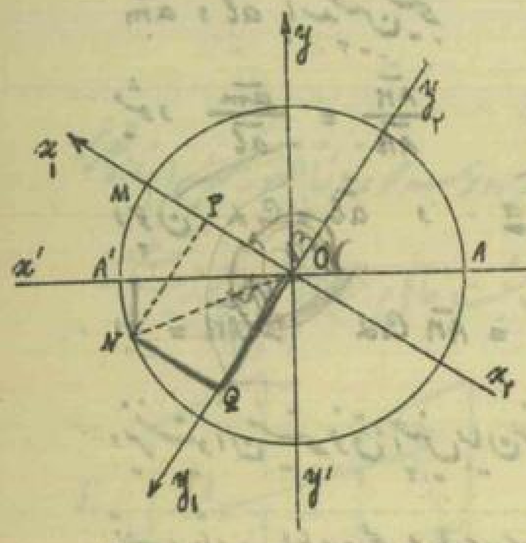
ب - جمع قوسها

مسئله اصلی - خطوط مثلثاتی چندین قوس معلوم است مطلوبست محاسبه خطوط مثلثاتی مجموع جبری این قوسها

۵۱- **اولاً محاسبه خطوط مثلثاتی قوس $(a+b)$** - ۱- محاسبه $C_{(a+b)}$

بر محیط دایره مثلثاتی از مبداء A قوس $\overset{\frown}{AM}$ را مساوی a و از مبداء M قوس $\overset{\frown}{MN}$ را برابر b جدا مینمائیم بنابراین اندازه قوس $\overset{\frown}{AN}$ مساوی $a+b$ است محور $x'x$ منطبق بر OM که جهت مثبتش از O بسمت M است محور جیب تمام

$$\sin(a+b) = \overline{OQ}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-b\right) + \overline{NQ}\cdot\cos(\pi-a)$$
$$= \sin a\cos b + \cos a\sin b$$



قوسهای مبدأ M میباشد و محور y_1y_2 عمود بر x_1x_2 محور جیب این قوسهاست پس چون نقطه N را بر دو محور x_1x_2 و y_1y_2 تصویر کنیم بنا بتعریف نتیجه میشود

$$\overline{OP} = \cos b \quad \text{و} \quad \overline{OQ} = \sin a$$

حال مستوان (ON) را مجموع هندسی دو حامل (OP) و (PN) قرارداده چنین نوشت $(ON) = (OP) + (PN)$

لذا بنا بقضیهٔ تصاویر نتیجه میشود $\text{proj}_{x'x}^{(ON)} = \text{proj}_{x'x}^{(OP)} + \text{proj}_{x'x}^{(PN)}$ (۱) و چون ملاحظه کنیم که

$$\text{proj}_{x'x}^{(ON)} = \cos(a+b)$$

$$\text{proj}_{x'x}^{(OP)} = \overline{OP}\,\cos(\widehat{x'x, x_1x}) = \cos b\cos a$$

$$\text{proj}_{x'x}^{(PN)} = \overline{PN}\,\cos(\widehat{x'x, y_1y}) = \sin b\cos(a+\tfrac{\pi}{2})$$

$$= -\sin b\sin a$$

لذا رابطهٔ (۱) چنین میشود $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$ (۲۲)

۲- محاسبهٔ $\sin(a+b)$ از تصویر شعاع ON بر محور $y'y$ نتیجه میشود

$$\text{proj}_{y'y}^{(ON)} = \text{proj}_{y'y}^{(OP)} + \text{proj}_{y'y}^{(PN)}$$ (۲) و چون

$$\text{proj}_{y'y}^{(OP)} = \overline{OP}\,\cos(\widehat{y'y, x_1x}) = \cos b\cos(a-\tfrac{\pi}{2}) = \cos b\sin a$$

$$\text{proj}_{y'y}^{(PN)} = \overline{PN}\,\cos(\widehat{y'y, y_1y}) = \sin b\cos a$$ ،

پس رابطهٔ (۲) چنین میشود $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$ (۲۳)

تبصره - میتوان بوسیلهٔ دستور (۲۲) رابطهٔ اخیر را استخراج نمود بدینطریق اگر دستور

(۲۲) را در بارهٔ دو قوس b و $\frac{\pi}{2}+a$ اعمال کنیم نتیجه میشود :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+a+b\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+a\right)\cos b - \sin\left(\frac{\pi}{2}+a\right)\sin b$$

و چون $\cos\left(\frac{\pi}{2}+a+b\right) = -\sin(a+b)$ ، $\cos\left(\frac{\pi}{2}+a\right) = -\sin a$

و $\sin\left(\frac{\pi}{2}+a\right) = \cos a$ لذا از رابطهٔ فوق با تغییر علامت طرفین بصورت دستور (۲۳) در میآید

۲- محاسبهٔ $\operatorname{tg}(a+b)$ چون $\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}$ لذا

$\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\sin a\cos b + \cos a\sin b}{\cos a\cos b - \sin a\sin b}$ از تقسیم صورت و مخرج حامل $\cos a\cos b$ نتیجه میشود

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a\operatorname{tg} b}$$ (۲۴)

۵۲- ثانیاً محاسبهٔ خطوط مثلثاتی قوس $(b-a)$ چون روابط (۲۲) و (۲۳)

و (۲۴) را درباره قوسهای a و b - اعمال نسائیم نتیجه میشود :

$$C(a-b) = Ca\,C(-b) - \lambda a\,\lambda(-b)$$

$$\lambda(a-b) = \lambda a\,C(-b) + Ca\,\lambda(-b) \quad ,$$

$$\tau(a-b) = \frac{\tau a + \tau(-b)}{1 - \tau a.\tau(-b)} \quad ,$$

و با ملاحظه دستورات ( ) حاصل میشود

$$C(a-b) = Ca\,Cb + \lambda a\,\lambda b \qquad (۲۵)$$

$$\lambda(a-b) = \lambda a\,Cb - Ca\,\lambda b \qquad (۲۶)$$

$$\tau(a-b) = \frac{\tau a - \tau b}{1 + \tau a\,\tau b} \qquad (۲۷)$$

۵۳ - ثالثاً محاسبهٔ خطوط مثلثاتی قوس $a+b+c$

چون $a+b$ را یک قوس اختیار نموده دستورات (۲۴) و (۲۳) و (۲۴) را در آن اعمال کنیم حاصل میشود

$$C(a+b+c) = C(a+b)\,Cc - \lambda(a+b)\,\lambda c$$

$$\lambda(a+b+c) = \lambda(a+b)\,Cc + C(a+b)\,\lambda c$$

$$\tau(a+b+c) = \frac{\tau(a+b) + \tau c}{1 - \tau(a+b)\,\tau c}$$

و چون $C(a+b)$ و $\lambda(a+b)$ و $\tau(a+b)$ را بسط دهیم حاصل میشود :

$$C(a+b+c) = Ca\,Cb\,Cc - \lambda a\,\lambda b\,Cc - \lambda a\,Cb\,\lambda c - Ca\,\lambda b\,\lambda c$$

$$\lambda(a+b+c) = \lambda a\,Cb\,Cc + Ca\,\lambda b\,Cc + Ca\,Cb\,\lambda c - \lambda a\,\lambda b\,\lambda c$$

$$\tau(a+b+c) = \frac{\tau a + \tau b + \tau c - \tau a\,\tau b\,\tau c}{1 - \tau a\,\tau b - \tau b\,\tau c - \tau a\,\tau c}$$

۵۴ - رابعاً محاسبه خطوط مثلثاتی $\pm a \pm b \pm c$ در دستورات فوق با تبدیل a به $-a$ یا b به $-b$ یا c به $-c$ خطوط مثلثاتی قوس $\pm a \pm b \pm c$ بدست میآید

۵۵ - خامساً محاسبهٔ خطوط مثلثاتی مجموع چند قوس - قوس مفروض را بدو دسته تقسیم تجزیه نموده دستورات سابق را در آن عمل نموده بسط میدهیم در اینصورت خطوط مثلثاتی قوس بدست میآید

تمرینات

۲۰ - مطلوبست محاسبهٔ عبارات $C(a \pm b)$ و $\lambda(a \pm b)$ و $\tau(a \pm b)$ وقتیکه

$\frac{1}{4} = \lambda a$ و $\frac{3}{5} = Ca$ باشد

۴۱- مطلوبست محاسبهٔ عبارت $\sin(a+b)$ وقتیکه $\sin a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ و $\sin b = \frac{1}{2}$

۴۲- مطلوبست محاسبهٔ عبارت $\sin(a+b+c)$ درصورتیکه $\sin a = \frac{3}{5}$ و

$\sin b = \frac{12}{13}$ و $\sin c = \frac{7}{25}$

۴۳- مطلوبست محاسبهٔ خطوط مثلثاتی قوسهای ۱۵° و ۷۵° :

اولا بوسیلهٔ روابط $30° - 45° = 15°$ و $30° + 45° = 75°$

ثانیا بوسیلهٔ روابط $45° - 60° = 15°$ و $45° - 120° = 75°$

۴۴- مطلوبست محاسبهٔ خطوط مثلثاتی قوسهای $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$ و $\frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{5}$ و

$\frac{\pi}{3} \pm \frac{\pi}{5}$ و $\frac{\pi}{8} \pm \frac{\pi}{6}$ و $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$

۴۵- صحت اتحادهای ذیل را تحقیق کنید :

$\cos(a+b)\cos(a-b) = \cos^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \sin^2 a$

$\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b$

$\cos(a+b)\sin(a-b) = \sin a \cos a - \sin b \cos b$

$\sin a \sin(b-c) + \sin b \sin(c-a) + \sin c \sin(a-b) = 0$

$\tan(a+b) = \frac{\sin^2 a - \sin^2 b}{\sin a \cos a - \sin b \cos b}$

$\tan a + \tan b = \frac{2\sin(a+b)}{\cos(a+b) + \cos(a-b)}$

$\tan(a-b) + \tan(b-c) + \tan(c-a) = \tan(a-b)\tan(b-c)\tan(c-a)$

۴۶- ثابت کنید که معادلات ذیل متعادلند :

$\tan^2 c = \tan a \tan b$ ، $\frac{\tan(a-b)}{\tan a} + \frac{\sin^2 c}{\sin^2 a} = 1$

$\sin x = \frac{\sqrt{1-q^2 y}}{\cos y} = \frac{\tan y}{\tan x}$ (۵۵)

معادلهٔ دستگاه $\begin{cases} \sin x / \sin y = \tan b \\ \cos y \cos x = \cos a \end{cases}$ را برحسب خطوط مثلثاتی

قوسهای a و b تعیین کنید

۴۸- ثابت کنید که از رابطه $\cos(a+b) = \cos a \cos b$ میتوان رابطه

$\sin^2(a+b) = (\sin a + \sin b)^2$ را بدست آورد

۴۹- ثابت کنید که اگر $a+b=c$ باشد رابطهٔ ذیل محقق است :

$\cos^2 a + \cos^2 b - 2\cos a \cos b \cos c = \sin^2 c$

۵۰- مطلوبست تعیین رابطهٔ بین ظل زوایای چهار ضلعی محدب

۵۱- ثابت کنید که عبارات ذیل بمقدار x بستگی ندارند

$\cos^2(a-x) + \cos^2 x - 2\cos a \cos x \cos(a-x)$

$\cos^2 x + \cos^2(\frac{2\pi}{3}+x) + \cos^2(\frac{2\pi}{3}-x)$

$3(\sin^8 x - \cos^8 x) + 4(\sin^6 x - 2\sin^4 x) + 6\sin^4 x$

۵۲- صحت روابط ذیل را ثابت کنید وقتیکه انتهای قوسها در ربع اول باشند

$\arcsin \frac{5}{13} + \arcsin \frac{12}{13} = \frac{\pi}{2}$

$\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} = \arctan \frac{1}{3}$

$\arctan(2+2\sqrt{2}) - \arctan \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$

$\arctan \frac{1}{a} + \arctan \frac{a-1}{a+1} = \frac{\pi}{4} \quad 0 < a < 1$

$\arctan(a+1) - \arctan(a-1) = \arctan \frac{2}{a^2}$

PDF.tarikhema.org

$$\sin(a+m)\sin(a-m) = -(1-\sin^2 a)(1-\sin^2 m) + 1 + \sin^2 a \sin^2 m$$
$$= \sin^2 a \sin^2 m - \sin^2 a - \sin^2 m + 1 + \sin^2 m$$
$$= (\sin a \sin m - \sin a \sin b)(\sin a \sin m + \sin a \sin b) + 1$$
$$= \sin(a+m)\sin(a-m) + 1 - \sin^2(a+m)$$

$$\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$$

$$\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{7} + \arctan\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$$

۵۱- اگر A و B و C زوایای مثلث باشند صحت روابط ذیل را ثابت کنید :

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$$

$$2(1 + \cos A \cos B \cos C) = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$$

$$\sin A \cos B \cos C + \sin B \cos A \cos C + \sin C \cos A \cos B = \sin A \sin B \sin C$$

$$\cos A \sin B \sin C + \cos B \sin A \sin C + \cos C \sin A \sin B = 1 + \cos A \cos B \cos C$$

$$\sin^2 A \cos(B-C) + \sin^2 B \cos(C-A) + \sin^2 C \cos(A-B) = 2 \sin A \sin B \sin C$$

۵۲- مطلوبست محاسبهٔ عبارت $\frac{\sin(a+b)}{\sin(x+y)}$ وقتیکه $\tan a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ،

$$\tan b = \frac{1}{\sqrt{15}} \quad , \quad \cos x = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad , \quad \cos y = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$$

۵۳- اگر $\tan a$ و $\tan b$ ریشه‌های معادله $x^2 + 7x + 9 = 0$ باشند مطلوبست محاسبه عبارت $9\cos^2(a+b) + 14\sin(a+b)\cos(a+b) + 8\sin^2(a+b)$ برحسب ضرایب 7 و 9 .

فصل پنجم

ضرب و تقسیم قوسها

مسئلهٔ کلی — بفرض معلوم بودن خطوط مثلثاتی قوس a مطلوبست

محاسبهٔ خطوط مثلثاتی قوس na یا $\frac{a}{n}$ (n عددی است صحیح)

۵۴- ضرب قوسها — اولا محاسبه خطوط مثلثاتی قوس $2a$ —

چون در دستورات (۲۲) و (۲۳) و (۲۴) b را مساوی a فرض کنیم دستورات ذیل نتیجه میشود :

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 2\sin^2 a - 1 \qquad (۲۸)$$

$$\sin 2a = 2\sin a \cos a \qquad (۲۹)$$

$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a} \qquad (۳۰)$$

از رابطه فوق معلوم میشود که فقط $\cos 2a$ برحسب $\sin a$ یا $\cos a$ منطق میباشد

ثانیاً محاسبهٔ خطوط مثلثاتی قوس $3a$ — چون در روابط خطوط مثلثاتی $a+b$ قوس b را به $2a$ تبدیل نموده و در حاصل خطوط مثلثاتی قوس $2a$ را بسط داده‌ایم با ملاحظه $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ روابط ذیل نتیجه میشود :

$$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a \qquad (۳۱)$$

$$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a \qquad (۳۲)$$

$$\tan 3a = \frac{3\tan a - \tan^3 a}{1 - 3\tan^2 a} \qquad (۳۳)$$

PDF.tarikhema.org

ثالثاً خطوط مثلثاتی قوس na - بهمین طریق چون در روابط خطوط مثلثاتی $a+b$ قوس a را مرتباً به $2a$ و $3a$ وغیره تبدیل نموده خطوط مثلثاتی قوسهای $3a$ و $4a$ وغیره را بسط دهیم خطوط مثلثاتی na معلوم میشود

۵۷- تقسیم قوسها - محاسبه خطوط مثلثاتی قوس $\frac{a}{n}$ - برای محاسبه خطوط مثلثاتی قوس $\frac{a}{n}$ بنابر آنکه $\cos a$ یا $\sin a$ یا $\tan a$ معلوم باشد در روابط $\cos na$ یا $\sin na$ یا $\tan na$ قوس a را به $\frac{a}{n}$ تبدیل میکنیم در اینصورت روابط اول و دوم معادله دو مجهولی خواهد بود که هریک با رابطه $\cos^2\frac{a}{n}+\sin^2\frac{a}{n}=1$ تشکیل دستگاه دو معادله دو مجهولی را میدهد که از حل آنها $\sin\frac{a}{n}$ و $\cos\frac{a}{n}$ بحسب $\cos a$ یا $\sin a$ بدست میآید در رابطه سوم معادله بیت یک مجهولی برحسب $\tan\frac{a}{n}$ که از حل آن $\tan\frac{a}{n}$ بحسب a حساب میشود

تبصره - باید دانست که با تصدیقات فعلی حل این مسئله همیشه ممکن نبوده و وقتی قابل حل است که n مساوی یکی از قوای دو باشد در اینصورت حل مسئله منجر بحل یک یا یک سلسله معادلات درجه دوم میشود

مسئله ۱ - مطلوبست محاسبه خطوط مثلثاتی قوس $\frac{a}{2}$ برحسب $\cos a$

حل جبری - چون از دستور $\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a$ قوس a را به $\frac{a}{2}$ تبدیل کنیم معادله حاصل با رابطه $1=\cos^2\frac{a}{2}+\sin^2\frac{a}{2}$ تشکیل دستگاه دو مجهولی ذیل را میدهد:

$$\begin{cases}\cos a=\cos^2\frac{a}{2}-\sin^2\frac{a}{2}\\ 1=\cos^2\frac{a}{2}+\sin^2\frac{a}{2}\end{cases}$$

که از حل آن نتیجه میشود:

$$\cos\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}$$

$$\sin\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}$$

و از آنجا

$$\tan\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}$$

بطوریکه ملاحظه میشود بفرض معلوم بودن $\cos a$ برای $\cos\frac{a}{2}$ و $\sin\frac{a}{2}$ و $\tan\frac{a}{2}$ هریک دو جواب مساوی و مختلف العلامه بدست میآید و این موضوع را بوجه هندسی و مثلثاتی نیز نمیتوان تحقیق نمود

حل هندسی - بر قطر AA' طول $\overline{OT}$ مساوی $\cos a$ را نقل نموده از نقطه T وتر MM' را بر قطر AA' عمود میکنیم در اینصورت قوسهای a عبارتند از قوسهای بمبدء A و منتهای M یا M' و قوسهای $\frac{a}{2}$ هرگاه منتهای

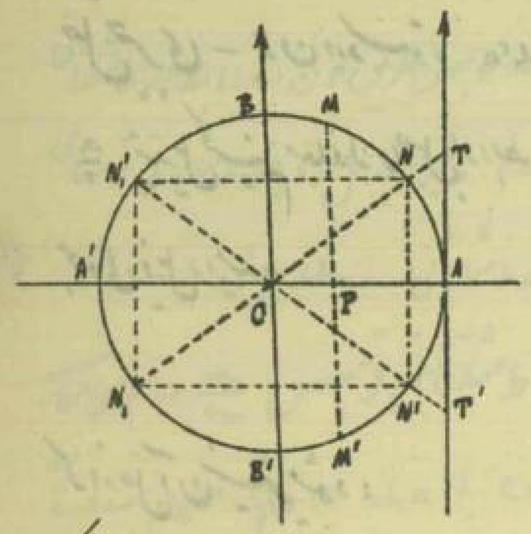
قوس a ، انقطه N فرض کنیم

بمنتهای N وسط قوس هندسی

AH و یا N_1 قرینه آن نسبت

بمرکز O میباشد و هرگاه قوس a

را بمنتهای N' فرض نمائیم انتهای



قوسهای $\frac{\pi}{2}$ نقطه N' وسط قوس هندسی AH' و یا N_1' قرینه آن نسبت بمرکز

O خواهد بود

بنابر آنکه منتهای قوس $\frac{\pi}{2}$ را N_1 یا N' و N_1' یا N فرض کنیم بارعایت آنکه

شکل $NN'N_1N_1'$ مربع مستطیل است برای خطوط مثلثاتی قوس $\frac{\pi}{2}$ جوابهای

قرینه بدست میآید

حل مثلثاتی - اگر α یکی از اندازه‌های قوسی باشد که جیب تمامش مساوی $\sin a$

است در اینصورت کلیه اندازه‌های قوس a چنین است $a = 2K\pi \pm \alpha$

ولذا $\frac{a}{2} = K\pi \pm \frac{\alpha}{2}$ حال اگر K زوج باشد نتیجه میشود :

$$\sin\left(K\pi \pm \frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sin\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos\left(K\pi \pm \frac{\alpha}{2}\right) = +\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\tan\left(K\pi \pm \frac{\alpha}{2}\right) = \pm \tan\frac{\alpha}{2}$$

واگر k فرد باشد

$$\sin\left(K\pi \pm \frac{\alpha}{2}\right) = \mp \sin\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos\left(K\pi \pm \frac{\alpha}{2}\right) = -\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\tan\left(K\pi \pm \frac{\alpha}{2}\right) = \pm \tan\frac{\alpha}{2}$$

از اینجا نیز معلوم میشود که برای خطوط مثلثاتی قوس $\frac{a}{2}$ دو مقدار قرینه حاصل میشود

تبصره - هرگاه علاوه بر $\cos a$ قوس a نیز معلوم باشد منتهای قوس $\frac{a}{2}$ مشخص

شده ولذا جواب مسئله منحصر بفرد میگردد

مثال - مطلوبست محاسبه خطوط مثلثاتی قوس $\frac{\pi}{8}$ درصورتیکه $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

چون منتهای قوس $\frac{\pi}{8}$ در ربع اول است لذا خطوط مثلثاتی آن مثبت میباشد پس :

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}} = \sqrt{2}-1$$

PDF.tarikhema.org

مسئله ۲ - مطلوبست محاسبه خطوط مثلثاتی قوس $\frac{a}{2}$ برحسب $\sin a$

حل جبری - چون در دستور $\sin 2a = 2\sin a \cos a$ قوس a را به $\frac{a}{2}$ تبدیل کنیم معادله حاصل با دستور $\sin^2\frac{a}{2} + \cos^2\frac{a}{2} = 1$ تشکیل دستگاه دو مجهولی ذیل را میدهد :

$$\left|\begin{array}{l} 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2} = \sin a \\ \cos^2\frac{a}{2} + \sin^2\frac{a}{2} = 1 \end{array}\right.$$

حال چون دو رابطه فوق را یکمرتبه با هم جمع و یکمرتبه از یکدیگر تفریق کنیم حاصل میشود :

$$\left|\begin{array}{l} (\sin\frac{a}{2} + \cos\frac{a}{2})^2 = 1+\sin a \\ (\sin\frac{a}{2} - \cos\frac{a}{2})^2 = 1-\sin a \end{array}\right| \quad \text{و یا} \quad \left|\begin{array}{l} \sin\frac{a}{2} + \cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{1+\sin a} \\ \sin\frac{a}{2} - \cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{1-\sin a} \end{array}\right|$$

از ترکیب معادلات دستگاه اخیر چهار دستگاه دو معادله دو مجهولی بدست میآید که چون آنها را حل کنیم برای $\sin\frac{a}{2}$ و $\cos\frac{a}{2}$ مقادیر ذیل حاصل میگردد :

$$\sin\frac{a}{2} = \frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{1+\sin a} \pm \sqrt{1-\sin a}\right)$$

$$\cos\frac{a}{2} = \frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{1+\sin a} \mp \sqrt{1-\sin a}\right)$$

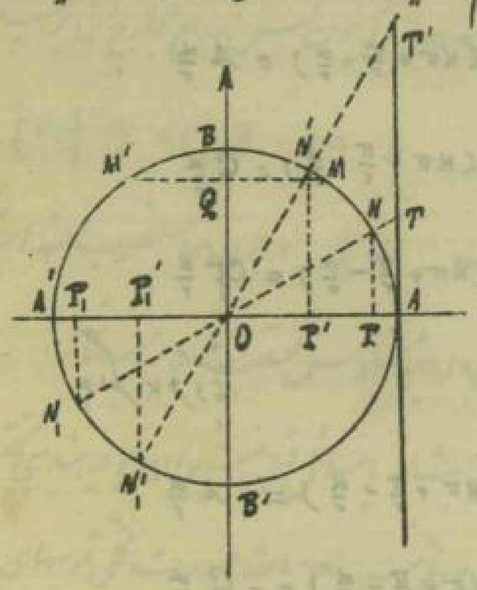
باید دانست که تمام ترکیبات علامات فوق جواب مسئله نبوده بلکه علامات باید نظیر بنظیر اختیار شوند بطوریکه مسئله دارای بیش از چهار جواب نخواهد بود

از تقسیم دو رابطه فوق بر یکدیگر با رعایت علامات نظیر برای $\frac{a}{2}$ فقط دو مقدار

$$\frac{\sqrt{1+\sin a} + \sqrt{1-\sin a}}{\sqrt{1+\sin a} - \sqrt{1-\sin a}} \quad \text{و} \quad \frac{\sqrt{1+\sin a} - \sqrt{1-\sin a}}{\sqrt{1+\sin a} + \sqrt{1-\sin a}}$$

که عکس یکدیگرند بدست میآید.

حل هندسی - بر قطر BB' قطعه $\overline{OQ}$ را مساوی $\sin a$ جدا نموده و از نقطه Q خط MM' را بر BB' عمود میکنیم در اینصورت قوسهای a عبارت میگردند از قوسهای مبدأ A و بمنتهای M یا M' و قوسهای $\frac{a}{2}$ مانند مسئله قبل بمنتهای N و N_1 یا N' و N'_1 خواهند بود حال بنابر آنکه منتهای قوس $\frac{a}{2}$ نقطه N یا N_1 یا N' یا N'_1 باشد



چهار جواب برای $\sin\frac{a}{2}$ و $\cos\frac{a}{2}$ بدست میآید که دو بدو متساوی و مختلف العلامه میباشند ولی چون نقاط N و N_1 و همچنین N' و N'_1 نسبت بمرکز O قرینه میباشند لذا برای $\frac{a}{2}$ فقط دو جواب $\overline{AT}$ و $\overline{AT'}$ نتیجه میشود که معکوس بودن

آنها را بسهولت میتوان تحقیق نمود

حل مثلثاتی ـ فرض میکنیم α یکی از اندازه‌های قوس a باشد در اینصورت

اندازه‌های قوس a عبارتند از $a = 2K\pi + \alpha$ و $a = (2K+1)\pi - \alpha$

پس اندازه‌های قوس $\frac{a}{2}$ عبارتند $\frac{a}{2} = K\pi + \frac{\alpha}{2}$ $\frac{a}{2} = K\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$

حال اگر K زوج باشد نتیجه میشود:

$\sin\frac{a}{2} = \sin(K\pi + \frac{\alpha}{2})$ $\cos\frac{a}{2} = \cos(K\pi + \frac{\alpha}{2})$

$\tan\frac{a}{2} = \tan(K\pi + \frac{\alpha}{2})$ $\cot\frac{a}{2} = \cot(K\pi + \frac{\alpha}{2})$

$\sec\frac{a}{2} = \sec(K\pi + \frac{\alpha}{2})$ $\csc\frac{a}{2} = \csc(K\pi + \frac{\alpha}{2})$

و اگر K فرد باشد

$\sin\frac{a}{2} = -\sin(K\pi + \frac{\alpha}{2})$ $\cos\frac{a}{2} = -\cos(K\pi + \frac{\alpha}{2})$

$\tan\frac{a}{2} = \tan(K\pi + \frac{\alpha}{2})$ $\cot\frac{a}{2} = \cot(K\pi + \frac{\alpha}{2})$

$\sec\frac{a}{2} = -\sec(K\pi + \frac{\alpha}{2})$ $\csc\frac{a}{2} = -\csc(K\pi + \frac{\alpha}{2})$

چنانکه ملاحظه میشود برای جیب و جیب تمام قوسهای $\frac{a}{2}$ چهار مقدار که دو بدو متساوی و مختلف العلامه اند بدست میآید ولی برای $\tan\frac{a}{2}$ فقط دو مقدار معکوس حاصل میشود

تبصره ـ هرگاه علاوه بر $\tan a$ قوس a نیز معلوم باشد منتهای قوس $\frac{a}{2}$ مشخص بوده بنابراین برای خطوط مثلثاتی قوس $\frac{a}{2}$ فقط یک جواب بدست میآید

مسئله ۳ ـ مطلوبست محاسبه $\tan\frac{a}{2}$ برحسب $\tan a$

حل جبری ـ چون در رابطه $\tan 2a = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$ قوس a را به $\frac{a}{2}$ تبدیل کنیم حاصل میشود $\tan a = \frac{2\tan\frac{a}{2}}{1-\tan^2\frac{a}{2}}$ که چون پس از رفع مخارج آنرا برحسب $\tan\frac{a}{2}$ مرتب کنیم معادله ذیل نتیجه میشود $\tan a\tan^2\frac{a}{2} + 2\tan\frac{a}{2} - \tan a = 0$

معادله اخیر معادله درجه دومی است برحسب $\tan\frac{a}{2}$ و چون حاصلضرب ریشه‌هایش

۱ـ است معلوم میشود که بموازاه دارای دو ریشه معکوس مختلف العلامه میباشد

حل هندسی ـ نتیجه فوق را بطریقی مشابه با مسائل قبل میتوان بوجه هندسی تحقیق نمود

حل مثلثاتی ـ اگر α یکی از اندازه‌های قوس a باشد صورت کلی قوسهای a $a = K\pi + \alpha$ و صورت کلی قوسهای $\frac{a}{2}$ $\frac{a}{2} = K\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}$ میباشد

حال اگر K زوج باشد یعنی $K = 2K'$ حاصل میشود:

$\tan\frac{a}{2} = \tan(2K'\pi + \frac{\alpha}{2}) = \tan(K\pi + \frac{\alpha}{2})$

واگر K فرد باشد یعنی $K=2K'+1$ نتیجه میشود :

$$\frac{a}{2}\cot\frac{a}{2} = \frac{1}{2}\left(K\pi + \frac{a}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(K'2\pi + \pi + \frac{a}{2}\right) = -\frac{a}{2}\tan\frac{a}{2}$$

چنانکه ملاحظه میشود مسئله دارای دو جواب $\frac{a}{2}\tan\frac{a}{2}$ و $-\frac{a}{2}\tan\frac{a}{2}$ که معکوس و مختلف العلامه اند میباشد

تبصره — از تحلیل مسئله فوق طریقه محاسبهٔ خطوط مثلثاتی قوسهای $\frac{a}{2}$ معلوم میشود و بهمین وجه میتوان خطوط مثلثاتی قوسهای $\frac{a}{4}$ که مساوی نصف $\frac{a}{2}$ است تعیین نمود و بهمین طریق خطوط مثلثاتی قوسهای $\frac{a}{8}$ و $\frac{a}{16}$ و بالاخره خطوط مثلثاتی قوسهای $\frac{a}{2^n}$ حساب میشود

۵۸ — محاسبهٔ خطوط مثلثاتی قوس a بحسب $\frac{a}{2}$ — چون طرف دوم روابط $\sin a = 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}$ و $\cos a = \cos^2\frac{a}{2} - \sin^2\frac{a}{2}$ را بر $\cos^2\frac{a}{2} + \sin^2\frac{a}{2}$ تقسیم کنیم حاصل میشود :

$$\sin a = \frac{2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}}{\cos^2\frac{a}{2} + \sin^2\frac{a}{2}} \quad \text{و} \quad \cos a = \frac{\cos^2\frac{a}{2} - \sin^2\frac{a}{2}}{\cos^2\frac{a}{2} + \sin^2\frac{a}{2}}$$

از تقسیم صورت و مخرج کسرهای طرف ثانی بر $\cos^2\frac{a}{2}$ نتیجه میشود :

$$\left\{\begin{array}{l} \sin a = \dfrac{2\tan\frac{a}{2}}{1+\tan^2\frac{a}{2}} \\ \cos a = \dfrac{1-\tan^2\frac{a}{2}}{1+\tan^2\frac{a}{2}} \end{array}\right. \qquad (۳۴)$$

واز تقسیم این دو رابطه بیکدیگر حاصل میشود

$$\tan a = \frac{2\tan\frac{a}{2}}{1-\tan^2\frac{a}{2}}$$

با ملاحظه سه رابطه فوق قضیه ذیل را میتوان نتیجه گرفت

قضیه — خطوط مثلثاتی هر قوس بحسب ظل نصف قوس آن عباراتی منطبقند

تمرینات

۵۶ — بفرض $\cos a = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ مطلوبست محاسبهٔ $\cos 2a$ و از آن قوسهای a را تعیین کنید

۵۷ — مطلوبست محاسبهٔ $\sin 2x$ درصورتیکه $\sin x - \cos x = \frac{1}{5}$ و همچنین درصورتیکه $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ باشد

۵۸ — اگر $\tan a = 2$ باشد مطلوبست محاسبه $\sin 2a$ و $\cos 2a$ و $\sin 4a$ و $\cos 4a$

۵۹ — بفرض $\sin a = \frac{1}{3}$ و $\tan = \frac{1}{2}$ ها a و a و ما کوچکتر از ۹۰ درجه

مطلوبست محاسبه $(\frac{\pi}{4}+a)$ بر حسب

۳۰- بفرض $\sin a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ مطلوبست محاسبه $\sin 3a$ و $\cos 3a$ و $\tan 3a$

۳۱- اگر $\tan(\frac{\pi}{4}+a) = \sqrt{2}+2$ باشد مطلوبست محاسبه $\tan a$ و قوس‌های a

۳۲- مطلوبست محاسبه $\tan 3a$ درصورتیکه $\tan 2a = \frac{4}{3}$ باشد

۳۳- مطلوبست محاسبه $\sin\frac{\pi}{12}$ و $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\tan\frac{\pi}{12}$ درصورتیکه

$\cos 4a = -\frac{24}{25}$ و انتهای قوس a در ربع چهارم باشد

۳۴- مطلوبست محاسبه $\sin\frac{\pi}{12}$ درصورتیکه $\cos 6a = \frac{1}{2}$ باشد

۳۵- مطلوبست محاسبه $\tan\frac{a}{2}$ دقیکه $\sin a = \frac{b}{c}$ باشد

۳۶- بفرض $\sin x = \frac{a-b}{a+b}$ مطلوبست تعیین $\tan(45^\circ - x)$ برحسب

مقادیر a و b

۳۷- مطلوبست محاسبه $\cos 2a$ و $\cos a$ درصورتیکه $\cos 2a = \frac{\sqrt{5}-1}{3}$

باشد

۳۸- صحت اتحادهای ذیل را تحقیق کنید :

$$\tan 2a - \tan a = \frac{2\sin a}{\cos a + \cos 2a}$$

$$\tan^2 2a - \tan^2 a = \frac{\sin 2a \sin a}{\cos^2 2a \cos^2 a}$$

$$\tan^3 a \cdot \tan a = \frac{\tan^2 2a - \tan^2 a}{1 - \tan^2 2a \tan^2 a} = \frac{\cos 2a - \cos 2a}{\cos 2a + \cos 2a}$$

$$\tan 2a + \sec 2a = \frac{\cos a + \sin a}{\cos a - \sin a}$$

$$\frac{\sin 2a}{1+\cos 2a} \times \frac{\cos a}{1+\cos a} = \tan\frac{a}{2}$$

$$\sin a = \frac{2}{\tan\frac{a}{2} + \cot\frac{a}{2}}$$

$$(\tan a + \cot 2a)^2 (1 - 2\tan a \cot 2a) = 4$$

$$\tan a + \tan(a+\frac{\pi}{3}) + \tan(a+\frac{2\pi}{3}) = 3\tan 3a$$

$$\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}) = \sqrt{\frac{1-\sin 2a}{1+\sin 2a}}$$

$$\sin 3a = 4\sin a \sin(\frac{\pi}{3}+a)\sin(\frac{\pi}{3}-a)$$

$$\cos 3a = 4\cos a \cos(\frac{\pi}{3}+a)\cos(\frac{\pi}{3}-a)$$

$$\tan 3a = \tan a \tan(\frac{\pi}{3}+a)\tan(\frac{\pi}{3}-a)$$

$$\frac{2\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \frac{\tan^2 2x}{1+\tan^2 2x}$$

$$\tan^2 x + \cot^2 x = 2\frac{3+\cos 4x}{1-\cos 4x}$$

$$\tan(45^\circ + a) - \tan(45^\circ - a) = 2\tan 2a$$

$$\tan a + \tan(a+\frac{\pi}{3}) + \tan(a+\frac{2\pi}{3}) = 3\tan 3a$$

$$(1+\tan\frac{a}{2}+\sec\frac{a}{2})(1+\tan\frac{a}{2}-\sec\frac{a}{2}) = \sin a \sec^2\frac{a}{2}$$

$$\cot\frac{a}{2} - \tan\frac{a}{2} = 2(\csc 2a + \cot 2a)$$

$$2(\cot\frac{a}{2} - \tan\frac{a}{2})^2 = \frac{4}{1-2\tan a \cot 2a}$$

۳۹- صحت اتحادهای ذیل را تحقیق کنید درصورتیکه انتهای قوس a در ربع اول واقع باشند

$$2\arcsin\frac{1}{3} - \arcsin\frac{1}{23} = \frac{\pi}{4}$$

$$2\arcsin\frac{1}{5} + \arcsin\frac{1}{4} = \frac{\pi}{4}$$

۴۰- اگر A و B و C زوایای مثلث باشند صحت روابط ذیل را ثابت کنید :

$$\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C = 4\sin A \sin B \sin C$$

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 4\cos A \cos B \cos C + 1 = 0$$

$$2\cos A \cos B \cos C = -\frac{\sin 2A}{\sin B + \sin C}$$

۷۱- اگر $\tan 2x = \frac{2b}{a-c}$ ،

$$y = a\cos^2 x + 2b\sin x \cos x + c\sin^2 x$$

$$z = a\sin^2 x - 2b\sin x \cos x + c\cos^2 x$$ باشد

مطلوبست محاسبه y و z برحسب مقادیر a و b و c

۷۲- بفرض $\cos x = \frac{a}{b+c}$ ، $\cos y = \frac{b}{c+a}$ و $\cos z = \frac{c}{a+b}$

صحت تساوی ذیل را اثبات کنید :

$$\sin^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{y}{2} + \sin^2\frac{z}{2} = 1$$

۷۳- اگر $(1+\cos\theta)(1-\cos\alpha) = 1-\cos^2\alpha$ باشد

ثابت کنید که $\tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}\tan^2\frac{\alpha}{2}$

۷۴- مطلوبست تعیین معادله که ریشه هایش مربع ریشه های معادله ذیل باشد

$$x^3 + 2x^2 - 4x - 1 = 0$$

و بوسیلهٔ حل این دو معادله

مسئله را امتحان کنید

۷۵- صحت اتحاد ذیل را تحقیق نموده

و از آن دستور ذیل را بدست آورید :

$$\operatorname{cosec} 2a + \operatorname{cotg} 2a = \operatorname{cotg} a$$

$$\operatorname{cosec} 2a + \operatorname{cosec} a + \operatorname{cosec}\frac{a}{2} + \dots + \operatorname{cosec}\frac{a}{2^n} = \operatorname{cotg}\frac{a}{2^{n+1}} - \operatorname{cotg} 2a$$

۷۶- بوسیلهٔ هریکسار معادلات :

$$x^2 - 2x\sin\alpha + 1 = 0 \quad ,\quad x^2 - 2x\cos\alpha + 1 = 0$$

مطلوبست محاسبه خطوط مثلثاتی و تنهای $2x$

$$x^2 - 2x\tan\alpha - 1 = 0$$

فصل ششم

۱- تبدیل مجموع بحاصلضرب و بالعکس

۷۹- چون روابط

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$$

را یکدفعه جمع و یکدفعه از هم تفصان کنیم روابط ذیل نتیجه میشود :

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a\cos b$$

$$\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\sin a\sin b$$

و همچنین از جمع و تفریق دو دستور :

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$$

حاصل میشود :

$$\sin(a+b)+\sin(a-b) = 2\sin a\cos b$$

$$\sin(a+b)-\sin(a-b) = 2\cos a\sin b$$

بنابراین از روابط فوق دستورات ذیل نتیجه میشود :

$$\left.\begin{aligned}
\sin a\cos b &= \tfrac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]\\
\cos a\sin b &= \tfrac{1}{2}\left[\sin(a+b)-\sin(a-b)\right]\\
\cos a\cos b &= \tfrac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]\\
\sin a\sin b &= \tfrac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]
\end{aligned}\right\} \quad (۳۵)$$

ازاین روابط معلوم میشود که همواره ممکن است حاصلضرب دو جیب و دو جیب تمام یا حاصلضرب یک جیب در یک جیب تمام را بمجموع یا تفاضل دو جیب یا دو جیب تمام تبدیل نمود

۶۰ - حال اگر در روابط (۳۵) قوس a را مساوی $\frac{\pi}{2}+\theta$ و b را مساوی $\frac{\pi}{2}-\theta$ فرض کنیم دستورات ذیل نتیجه میشود :

$$\left.\begin{aligned}
\sin\tfrac{\pi}{2}\cos\theta &= 2\sin\tfrac{\pi+\theta}{2}\cos\tfrac{\pi-\theta}{2} = \sin\theta+\cos\theta\\
\cos\tfrac{\pi+\theta}{2}\sin\tfrac{\pi-\theta}{2} &= 2\sin\tfrac{\pi-\theta}{2} = \cos\theta-\sin\theta
\end{aligned}\right\} \quad (۳۶)$$

بوسیله این روابط میتوان حاصلجمع یا تفاضل دو جیب یا دو جیب تمام را بحاصلضرب تبدیل نمود

ب - تبدیل بعضی عبارات

۱ - تبدیل مجموع یا تفاضل یک جیب و یک جیب تمام بحاصلضرب - برای تبدیل فوق کافی است که یکی از قوسها را بقوس متمم آن تبدیل نموده از انتقال :

$$\sin\theta+\cos\theta = \sin\theta+\sin(\tfrac{\pi}{2}-\theta)$$

و یا

$$\sin\theta+\cos\theta = 2\sin(\tfrac{\theta+\frac{\pi}{2}-\theta}{2})\cos(\tfrac{\theta-\frac{\pi}{2}+\theta}{2})$$

۲ - تبدیل $1\pm\cos a$ - چون بجای $\cos a$ مساوی آن $\cos 0$ را قرار دهیم مرتباً نتیجه میشود :

$$\left.\begin{aligned}
1+\cos a &= \cos 0+\cos a = 2\cos^2\tfrac{a}{2}\\
1-\cos a &= \cos 0-\cos a = 2\sin^2\tfrac{a}{2}
\end{aligned}\right\} \quad (۳۷)$$

۳ - تبدیل $1\pm\sin a$ - چون بجای مساوی آن $\sin\frac{\pi}{2}$ را قرار دهیم مرتباً نتیجه میشود

$$1+\sin a = \sin\tfrac{\pi}{2}+\sin a = 2\sin(\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{a}{2})\cos(\tfrac{\pi}{4}-\tfrac{a}{2})$$

$$1-\sin a = \sin\tfrac{\pi}{2}-\sin a = 2\sin(\tfrac{\pi}{4}-\tfrac{a}{2})\cos(\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{a}{2})$$

و چون قوسهای $\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}$ و $\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}$ متمم یکدیگرند لذا روابط فوق چنین میشود

$$(\sin\tfrac{a}{2}-\cos\tfrac{a}{2})^2\cos 2 = (\sin\tfrac{a}{2}+\cos\tfrac{a}{2})^2\sin^2 2 = 2+\sin a$$

$$(\sin\tfrac{a}{2}+\cos\tfrac{a}{2})^2\cos 2 = (\sin\tfrac{a}{2}-\cos\tfrac{a}{2})^2\sin^2 2 = 2-\sin a$$

۴- تبدیل عبارت $\frac{\sin^2 a+\sin^2 2}{\sin^2 a-\sin^2 2}$ - برطبق روابط اول و دوم (۳۶) حاصل میشود :

$$\frac{\sin^2\frac{a+2}{2}\cos\frac{a-2}{2}}{\sin^2\frac{a+2}{2}\cos\frac{a+2}{2}} = \frac{\sin^2 a+\sin^2 2}{\sin^2 a-\sin^2 2}$$

واز اینجا $\left|\frac{\cos\frac{a+2}{2}}{\cos\frac{a-2}{2}}\right| = \frac{\sin^2 a+\sin^2 2}{\sin^2 a-\sin^2 2}$

۵- تبدیل $\sin a \pm \sin 2$ ، $\cos a \pm \cos 2$ - چون بجای ظل و ظل تمام نسبت قرارداده اعمال لازمه را مجری داریم حاصل میشود :

$$\frac{\sin a\cos 2 \pm \cos a\sin 2}{\cos a\cos 2} = \frac{\sin a}{\cos a} \pm \frac{\sin 2}{\cos 2} = \tan a \pm \tan 2$$

واز اینجا $\frac{\sin(a\pm 2)}{\cos a\cos 2} = \tan a \pm \tan 2$ (۳۸)

وبهمین طریق معلوم میشود که : $\frac{\cos(a\mp 2)}{\cos a\cos 2} = \cot a \pm \cot 2$ (۳۹)

دستور (۳۹) را میتوان بوسیلهٔ تبدیل قوسهای a و 2 بقوسهای متمم آن نیز دستور (۳۸) نتیجه گرفت

از دستورات فوق نتیجه میشود : $\frac{\sin(a-2)}{\sin(a+2)} = \frac{\tan a-\tan 2}{\tan a+\tan 2}$

$$\frac{\sin(a-2)}{\sin(a+2)} = \frac{\tan a-\tan 2}{\tan a+\tan 2}$$

۶- تبدیل عبارات $\sin a+\cos a$ و $\frac{1-\tan a}{1+\tan a}$ - چون $\tan\frac{\pi}{4}=1$

لذا $\frac{\cos a+\sin a}{\cos a} = \frac{\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-a)}{\cos a} = \frac{\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}+a)}{\cos a} = \tan(\frac{\pi}{4}+a)$

و $\tan(a+\frac{\pi}{4}) = \frac{\sin(a+\frac{\pi}{4})}{\cos(a+\frac{\pi}{4})} = \frac{\sin(a+\frac{\pi}{4})}{\sin(\frac{\pi}{4}-a)} = \frac{1+\tan a}{1-\tan a}$

ج- جدول لگاریتمی

۱- چون در مثلثات برای سهولت اغلب محاسبات بوسیلهٔ لگاریتم انجام میگیرد لذا لگاریتم خطوط مثلثاتی قوسهای محصور ما بین صفر و ۹۰ درجه را در جداول مخصوصی تنظیم نمودند اندازه محاسبات بارجوع بجداول فوق بتوان مسائل لازمه را حل نمود اینک نکات اصلیه ذیل را راجع بتشکیل و طرز استعمال جداول فوق الذکر متذکر میشویم

عموماً لگاریتم خطوط مثلثاتی قوسهای بین صفر و ۹۰ درجه را در جداول مختلفه تا چهار یا پنج و یا هفت و یا نه رقم اعشار حساب کرده اند و فعلاً چون جدولی که بیشتر مورد استعمال دارد جدول معروف پنج رقمی J. Dupuis میباشد لذا بطرز تشکیل و استعمال جدول فوق میپردازیم

طرز تشکیل جداول فوق بدینطریق است که هر دو صفحه آن مخصوص لگاریتم خطوط مثلثاتی قوسهای

بین دو درجهٔ متوالی با اختلاف دقایق میباشد درجه فوق صفحه و دقایق در اولین ستون سمت راست مندرج است

حال با رعایت آنکه هرگاه دو قوس متمم یکدیگر باشند جیب یکی مساوی جیب تمام دیگری و ظل یکی مساوی ظل تمام دیگری میباشد ملاحظه میکنیم که هرگاه خطوط مثلثاتی قوسهای بین صفر و ۴۵ درجه معلوم باشد میتوان خطوط مثلثاتی قوسهای بین ۴۵ درجه و ۹۰ درجه را تعیین نمود چنانکه اگر در ستونی از فوق به تحت مقادیر $\log$ قوسهای از ۴۰ ۲۱ تا ۵۰ ۲۱ نوشته شده باشد این مقادیر از تحت بفوق مرتبا $\log$ قوسهای ۱۰ ۸۰ تا ۲۵ ۸۰ که متمم قوسهای فوقند خواهند بود بدین مناسبت است که در جداول خطوط مثلثاتی قوسهای بین صفر و ۴۵ درجه را مرتب نموده و در ذیل صفحه متمم آنها با اختلاف یکدرجه که مربوط بدقایق مندرجه در دو صفحه است ذکر نموده و ستون دقایق مربوط بذیل صفحه را در اولین ستون سمت چپ از تحت بفوق نوشته اند

در جداول لگاریتمی علاوه بر ستونهائیکه در آن لگاریتم خطوط مثلثاتی مندرج است شامل بعضی ستونهانیز میباشد که بعلامت diff. یا ∥ مشخص شده مقادیر مندرجه در این ستونها عبارتند از تفاضل دو لگاریتم متوالی چنانکه:

$\log \sin(23^\circ 15') = \bar{1},59432$ و $\log \sin(23^\circ 16') = \bar{1},59441$

(صفحه ۸۴ جدول J. Dupuis) تفاضل این دو لگاریتم که مساوی ۹ است در ستون ∥ بین دو ردیف ۱۵ و ۱۶ ذکر شده و همچنین ستون ∥ مقابل $\log \tan$ عبارت از تفاضل $\log \cot$ قوسهای متوالی است ولی برای $\log \sin$ و $\log \cos$ فقط یک ستون ∥ بین آنها موجود است زیرا چون $\sin A = \frac{1}{\cos A}$ و $\sin B = \frac{1}{\cos B}$ میباشد پس $\log \sin A = -\log \cos A$ و $\log \sin B = -\log \cos B$ بوده و از تفریق این دو تساوی نتیجه میشود:

$$\log \sin A - \log \sin B = -[\log \cos A - \log \cos B]$$

یعنی تفاوت بین $\log \sin$ دو قوس از حیث قدر مطلق مساوی تفاضل $\log \cos$ این دو قوس است

۴۲- **طرز استعمال جداول لگاریتمی** - بوسیلهٔ جداول لگاریتمی میتوان دو مسئله ذیل را حل نمود

۱- بفرض معلوم بودن قوسی کوچکتر از ۹۰ درجه مطلوبست محاسبه لگاریتم خطوط مثلثاتی آن

۲- درصورتیکه لگاریتم یکی از خطوط مثلثاتی زاویه بین صفر و ۹۰ درجه معلوم باشد مطلوبست تعیین این زاویه

در حل این مسائل فقط بذکر نکات اصلیه ذیل میپردازیم :

وقتی که نمو قوسی نسبتاً کوچک باشد میتوان بطور نامحسوس نمو لگاریتم خطوط مثلثاتی را متناسب با نمو قوس فرض نمود بوسیلهٔ این مقدمه ممکن است خطوط مثلثاتی قوسی را که شامل اجزائی باشد که در جدول موجود نیست حساب نمود

چنانکه اگر مقصود تعیین $\log\sin(15^\circ\ 45'\ 32'')$ بوسیلهٔ جداول J. Dupuis باشد بوسیلهٔ جدول معلوم میشود (صفحه ۱۰۳) که $\log\tan(45^\circ\ 32'') = \bar{1},732318$ و در ستون D اختلاف جدولی را با $\log\sin$ ما بعد که مساوی ۱۹ است تعیین نموده بوسیلهٔ یک تناسب $\log\sin$ قوس مطلوب را معلوم میکنیم بدینقیم

بازاء نمو ۶۰ برقوس ۱۹ واحد بر مرتبه پنجم $(45^\circ\ 32'')$ $\log\sin$ اضافه میشود پس اگر ۱۵ برقوس اضافه شود مقدار $\frac{15\times19}{60} = 4,75$ بر مرتبه پنجم $(15^\circ\ 32'')\log\sin$ اضافه خواهد شد صورت عمل چنین است

$\log\sin(15^\circ\ 32'') = \bar{1},732318$

بازاء ۱۵ = ۴,۷۵

$\log\sin(15^\circ\ 15'\ 32'') = \bar{1},732322275$

عموماً محاسبهٔ این اختلاف را میتوان بوسیلهٔ ستونهای کوچکی که در حاشیه صفحه موجود است تعیین نمود

کلیه تفاوتهائیکه ممکن است در یک صفحه بین لگاریتم خطوط مثلثاتی واقع شود در حاشیه فوق ستونهای کوچکی نوشته شده و در یک طرف این ستونها از فوق به تحت اعداد ۱ و ۲ تا ۹ که نمایش ازدیاد ثانیه بر قوس است درج شده و در مقابل آنها مقادیریکه نمایش اختلاف مرتبه پنجم لگاریتم است ذکر شده چنانکه در مثال قبل در ستون D برای تعیین ازدیاد $\log\sin$ بازاء نمو ۱۵ برقوس بدینطریق عمل میکنیم

در این ستون معلوم میشود که بازاء نمو ۱ مقدار ۳۲,۰ و بازاء نمو ۵ مقدار ۱۵۸,۱ بر مرتبه پنجم اضافه میشود پس بازاء نمو ۱۰ مقدار $3,2 = 32,2 \times 10$ و بازاء نمو ۱۵ برقوس مقدار $4,78 = 1,58 + 3,2$ بر مرتبه پنجم $\log\sin$ اضافه میشود

چون جهت تغییرات جیب تمام و ظل تمام زاویه‌ٔ واقع بین صفر و ۹۰ درجه برخلاف جهت تغییرات این زاویه میباشد یعنی نظیر زاویه بزرگتر جیب تمام و ظل تمام کوچکتر است

لذا برای تعیین $\log c$ و $\log \alpha$ زاویه‌ای که اجزاء آن خارج حدود جدول است
باید $\log c_3$ و $\log \alpha_3$ زاویه بلافاصله بزرگتر را از جدول استخراج نموده
بوسیله تناسبی نظیر آنچه قبلاً ذکر نموده‌ایم مسئله را حل نمود
مثلاً اگر مقصود تعیین $\log c_3$ ($52^\circ\ 25'\ 7''$) باشد صورت عمل چنین است

$\log c_3$ ($26'\ 7''$) = ۱٫۳۷۵۲۸ (صفحه ۶۵) و اختلاف جدولی ۵۲
میباشد یعنی بازاء کم شدن $6''$ از قوس ۵۲ واحد بر مرتبه پنجم اضافه میشود لذا بازاء
کم شدن ۸ ثانیه از قوس $26'\ 7''$ مقدار $\frac{52 \times 8}{6} = 7{,}07$ بر مرتبه پنجم اضافه
میشود پس:

$\log c$ ($26'\ 7''$) = ۱٫۳۷۵۲۸

۷٫۵۷	= ۸

$\log c$ ($52^\circ\ 25'\ 7''$) = ۱٫۳۷۵۳۵۰۷

مقدار اختلاف ۷٫۰۷ را میتوان بسهولت از ستون $52''$ حاشیه تعیین نمود

مسئله عکس - بفرض معلوم بودن لگاریتم خطوط مثلثاتی قوسی کوچکتر از ۹۰ درجه
مطلوبست محاسبه آن قوس

این مسئله معکوس مسئله قبل است در ستون لگاریتم خط مثلثاتی لگاریتم مفروض را یافته
و بدینوسیله زاویه مطلوب معلوم میشود فقط باید نکات ذیل را در نظر گرفت

چون ۱٫۸۴۹۴۹ = $\log \sin 45^\circ$ = $\log \cos 45^\circ$ ،

$\log \tan 45^\circ$ = $\log \cot 45^\circ$ = ۰ پس اگر $\log \sin$ یا $\log \tan$
قوسی معلوم باشد باید آنها را مرتباً با اعداد ۱٫۸۴۹۴۹ و یا صفر مقایسه نمود اگر
کوچکتر از این مقادیر باشند از فوق صفحه در ستون $\log \sin$ یا $\log \tan$ مقادیر مفروض
را تعیین نموده قوس مطلوب بدست میآید والا از تحت صفحه در ستونهای $\log \sin$ و یا
$\log \tan$ این مقادیر را جستجو میکنیم

و در حالتیکه $\log c$ یا $\log \cot$ قوسی در دست باشد اگر از اعداد فوق
مرتبا بزرگتر باشند در اینصورت از فوق صفحه در ستونهای $\log c$ و $\log \cot$ والا از تحت
صفحه در ستونهای $\log c$ و $\log \cot$ مقادیر مفروض را تعیین نموده قوس نظیر آنها
را معلوم میکنیم

۶۳- **تبصره** - اگر بین خطوط مثلثاتی قوسی لگاریتم ظلش معلوم باشد در اینصورت
قوس مطلوب با دقت بیشتری معلوم میشود تا آنکه لگاریتم سایر خطوط مثلثاتی آن معلوم شد.

زیرا $\log \frac{1}{z} = \log \sin z - \log \cos z$

و $\log \frac{1}{(x+d)} - \log \cos(x+d) = \log \sin(x+d)$

(d قوسی است مثبت و $x+d$ بین صفر و ۹۰ درجه است) از تقریق این دو تساوی نتیجه میشود :

$$\log \frac{1}{(x+d)} - \log \frac{1}{z} =$$

$$[\log \sin(x+d) - \log \sin x] + [\log \cos z - \log \cos(x+d)]$$

اگر تفاضل طرف اول تساوی اخیر را به Δ و کمیت های طرف ثانی را به d و d' بنمائیم معلوم میشود که $\Delta = d + d'$ یعنی اختلاف جدولی $\log \frac{1}{z}$ بیش از اختلافات جدولی $\log \sin$ و $\log \cos$ میباشد پس چون قوس جزئی تغییر کند بین لگاریتم خطوط مثلثاتی آنها $\log \frac{1}{z}$ بیش از لگاریتم سایر خطوط مثلثاتی تغییر مینماید لذا بوسیله $\log \frac{1}{z}$ قوس با دقت بیشتری میتوان قوس مطلوب را تعیین نمود

۵ - قابل محاسبه نمودن عبارات و دستورات بوسیلهٔ لگاریتم

۶۲ - دستوریکه از روی آن مقدار مجهولی بحسب مقادیر معلومه بدست میآید وقتی قابل

محاسبه بوسیلهٔ لگاریتم نامیده میشود که بتوان لگاریتم مقدار مجهول را مستقیماً از روی لگاریتم مقادیر معلومه حساب نمود

از این قرار برای اینکه دستوری قابل محاسبه بوسیلهٔ لگاریتم باشد لازم و کافی است که بین مقادیر معلومه بوسیلهٔ علامات ضرب و تقسیم باشد

چون در جداول مثلثاتی لگاریتم خطوط مثلثاتی مندرج است لذا برای اینکه محاسبات سهلتر شود قبل از محاسبه باید دستورات و عبارات را قابل محاسبه بوسیلهٔ لگاریتم نمود

بعنوان مثال فرض میکنیم زوایای A و B معلوم و مطلوب محاسبهٔ قوس x از دستور $\sin x = 2 \sin 45° + \sin B$ (۱) باشد

برای محاسبه x از دستور (۱) اولاً باید $2 \sin 45°$ و $\log \sin 45°$ و $\log \sin B$ را حساب نمود ثانیاً باید یا باز او آنها را تعیین نمود تا $\sin 45°$ و $\sin B$ معلوم شود ثالثاً باید لگاریتم مجموع $\sin 45° + \sin B$ را حساب نموده بران لگاریتم ۲ را افزود تا $\log \sin x$ معلوم شود رابعاً بوسیلهٔ معلوم بودن $\log \sin x$ باید قوس x را بوسیلهٔ جدول تعیین نمود

اما اگر قبل از محاسبات فوق دستور (۱) را قابل محاسبه کنیم چنین نتیجه میشود

۵°,۱۰ C_g ۴۴°,۵۰ $\sin$ = $\sin x$ (۲) محاسبه x از دستور اخیر ساده

تر است زیرا چون ۴۴°,۵ $\sin$ و ۱۲°,۵ $\cos$ را تعیین نمود

حاصل را جمع کنیم $\sin x$ و در نتیجه قوس x تعیین میشود

تبدیل دستور (۱) را به دستور (۲) قابل محاسبه نمودن دستور (۱) مینامند

اینک برای تمرین بعضی عبارات را بعبارات قابل محاسبه بوسیله لگاریتم تبدیل میکنیم

۱- تبدیل مجموع $A+B$ - بفرض معلوم بودن A و B و $\log$

مطلوبست تبدیل $A+B$

عبارت فوق را میتوان چنین نوشت $A+B = A(1+\frac{B}{A})$ و چون A و B

مقادیر مثبتند لذا $\frac{B}{A}$ مثبت و میتوان آنرا مساوی $\tan^2\varphi$ فرض نمود (زاویه φ

را که واسطه تبدیل فوق میباشد زاویه معین مینامند) در اینصورت عبارت فوق چنین

میشود :

$$A+B = A(1+\tan^2\varphi) = \frac{A}{\cos^2\varphi}$$

عبارت اخیر قابل محاسبه بوسیله لگاریتم است زیرا :

$$\log(A+B) = \log A + 2\operatorname{colog}\cos\varphi$$

زاویه معین φ را از رابطه ذیل میتوان حساب نمود : $\frac{B}{A} = \tan^2\varphi$

و بنابراین $\log\tan\varphi = \frac{1}{2}(\log B + \operatorname{colog} A)$

۲- تبدیل $A-B$ - فرض میکنیم A و B دو عدد مثبت و A بزرگتر از

B باشد (در حالتیکه $B>A$ است $B-A$ را تبدیل نموده پس از محاسبه برحاصل

علامت - را میافزائیم) عبارت مفروض را میتوان چنین نوشت :

$A-B = A(1-\frac{B}{A})$ و چون $B<A$ است بنابراین میتوان $\frac{B}{A}$ را مساوی $\sin^2\varphi$

فرض نمود ولذا عبارت فوق چنین میشود :

$$A-B = A(1-\sin^2\varphi) = A\cos^2\varphi$$

عبارت اخیر قابل محاسبه لگاریتمی است زیرا :

$$\log(A-B) = \log A + 2\log\cos\varphi$$

زاویه معین φ از رابطه ذیل حساب میشود :

$$\log\sin\varphi = \frac{1}{2}(\log B + \operatorname{colog} A)$$

تبصره - ممکن است بیک وسیله دو عبارت فوق را قابل محاسبه نمود بدینطریق :

چون در عبارت $A\pm B = A(1\pm\frac{B}{A})$ مقدار $\frac{B}{A}$ را مساوی $\tan\varphi$ فرض

کنیم زاویه معین φ از دستور $\log\tan\varphi = \log B + \operatorname{colog} A$ تعیین و عبارت

فوق چنین میشود :

$$A\pm B = A(1\pm\tan\varphi) = \frac{A\sqrt{2}\sin(45^\circ\pm\varphi)}{\cos\varphi}$$

عبارت اخیر قابل محاسبهٔ لگاریتمی است

مورد استعمال این تبدیل کمتر از تبدیلات قبل است زیرا محاسبات لگاریتمی در آن زیادتر نمیباشد

۲- **تبدیل عبارت** $A\pm B\pm C\pm$ - چون $A\pm B$ را یکی از وسائل قبل تبدیل بحاصلضرب نمائیم و حاصل آنرا با $C\pm$ و حاصل عبارت اخیر را با $D\pm$ قابل محاسبه کنیم عبارت فوق بوسیلهٔ انتخاب یکعده قوسهای معین قابل محاسبه میشود

۳- **تبدیل عبارت کسری** $\frac{A\pm B\pm C\pm \dots}{A'\pm B'\pm C'\pm \dots}$ - چون صورت و مخرج کسر فوق را جداگانه تبدیل کنیم عبارت فوق قابل محاسبه میشود

مثال - مطلوبست محاسبهٔ $\frac{A-B}{A+B}$ درصورتیکه $\log A$ و $\log B$ معلوم باشند

چون صورت و مخرج را بر A تقسیم نموده $\frac{B}{A}$ را مساوی $\tan\varphi$ فرض کنیم عبارت فوق چنین میشود :

$$\frac{A-B}{A+B} = \tan(45^\circ-\varphi)$$

۴- **تبدیل عبارات اصم** - برای تبدیل عبارت $\sqrt[m]{c}$ باید مقدار زیر رادیکال را بحاصلضرب عوامل تبدیل نمود

مثال - مطلوبست تبدیل عبارت $\sqrt{A^2+B^2}$

چون A^2 را عامل مشترک قرار داده $\frac{B^2}{A^2}$ را مساوی $\tan^2\varphi$ فرض کنیم عبارت فوق بدینصورت درمیآید $\sqrt{A^2+B^2} = \frac{A}{\cos\varphi}$

برای تمرین در تبدیلات فوق بحل مسائل ذیل میپردازیم

مسئله ۱- اگر a و c دو قطعه خط و A زاویه معلومی باشد عبارت ذیل را قابل محاسبه نمائید $\sqrt{a^2+c^2-2ac\cos A}$

حل - برحسب اینکه a و c معلوم و یا اینکه لگاریتمشان معلوم باشد دو حالت اتفاق میافتد :

اولاً a و c معلومند - چون $\cos A = \cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}$ و

$\cos^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{A}{2} = 1$ لذا عبارت فوق چنین میشود

$\sqrt{(a^2+c^2)(\cos^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{A}{2}) - 2ac(\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2})}$ و یا

$\sqrt{(a+c)^2\cos^2\frac{A}{2} + (a-c)^2\sin^2\frac{A}{2}}$ چون $(a+c)$ را عامل مشترک قرار داده آنرا از زیر رادیکال خارج کنیم حاصل میشود :

$(a+c)\cos\frac{A}{2}\sqrt{1+\left(\frac{a-c}{a+c}\right)^2\tan^2\frac{A}{2}}$

حال اگر زاویه معین φ را قسمی انتخاب کنیم که : $\tan\varphi = \frac{a-c}{a+c}\tan\frac{A}{2}$ (۱)

باشد عبارت فوق چنین میشود $\frac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{\cos\varphi} = \sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}$

ثانیاً لگاریتمهای b و c معلوم‌اند، زاویه معین دیگر δ را قسمی انتخاب میکنیم که $\frac{c}{b} = \tan\delta$ باشد در اینصورت رابطه (۱) برحسب δ چنین میشود :

$\sin\frac{A}{2}\cos\varphi\cos(\delta-\frac{\pi}{4}) = \cos\delta\sin\varphi$ ولذا عبارت مفروض بدینصورت درمیآید :

$$\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A} = \frac{b\sqrt{2}\sin\frac{A}{2}\cos(\delta-\frac{\pi}{4})}{\cos\delta\cos\varphi}$$

مسئلهٔ ۲ حل مثلثاتی معادلات درجهٔ دوم — بفرض اینکه معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ دارای ریشه‌های حقیقی باشد و لگاریتم قدر مطلق ضرائبش معلوم باشد مطلوبست محاسبهٔ ریشه‌های آن

چون در دستور $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ مقدار b^2 را از زیر رادیکال خارج کنیم ریشه‌های معادلهٔ مفروض بدینصورت درمیآید :

$$x=\frac{-b}{2a}\left(1\pm\sqrt{1-\frac{4ac}{b^2}}\right)$$

برای تبدیل این عبارت دو حالت اتفاق میافتد :

حالت اول $ac>0$ — دراینصورت معادلهٔ مفروض دارای ریشه‌های متحدالعلامه است وچون $\Delta>0$ میباشد لذا $b^2>4ac$ و بنابراین

$\frac{4ac}{b^2}<1$ بطوریکه میتوان زاویه معین φ را قسمی انتخاب نمود که $\cos^2\varphi = \frac{4ac}{b^2}$ باشد دراینصورت ریشه‌های معادله چنین میشوند :

$$x' = \frac{-b}{2a}(1+\cos\varphi) = \frac{-b}{a}\cos^2\frac{\varphi}{2}$$

$$x'' = \frac{-b}{2a}(1-\cos\varphi) = \frac{-b}{a}\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

حالت دوم $ac<0$ — دراینصورت ریشه‌های معادلهٔ مفروض مختلف‌العلامه‌اند وچون $\frac{4ac}{b^2}$ منفی است لذا میتوان $\frac{4ac}{b^2}$ را مساوی $-\tan^2\varphi$ فرض نمود ولذا ریشه‌های معادلهٔ مفروض چنین میشود :

$$x=\frac{-b}{2a}\left(1\pm\sqrt{1+\tan^2\varphi}\right)=\frac{-b}{2a}\times\frac{\cos\varphi\pm1}{\cos\varphi}$$

واز آنجا $x'=\frac{-b}{a}\times\frac{\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi}$ و $x''=\frac{b}{2a}\times\frac{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi}$

مسئلهٔ ۳ — عبارت $x=a\cos(\omega t+\alpha)+b\cos(\omega t+\beta)$ را که در آن t نمایش زمان و a و b و ω اعدادی مثبت و α و β دو عدد جبری میباشند بعبارت $c\cos(\omega t+\delta)$ تبدیل کنید (c نمایش عددی مثبت و δ عددی است جبری)

پس از بسط عبارت فوق حاصل میشود :

$$x = (aC_\alpha + bC_\beta)C_{\omega t} - (aS_\alpha + bS_\beta)S_{\omega t} = x$$

چون عبارت $(aC_\alpha + bC_\beta)$ را عامل مشترک قرار داده و کسر

$\frac{aS_\alpha + bS_\beta}{aC_\alpha + bC_\beta}$ را مساوی $\tan\gamma$ فرض کنیم عبارت فوق چنین میشود

$$x = \frac{aC_\alpha + bC_\beta}{C_\gamma}(C_{\omega t}C_\gamma - S_{\omega t}S_\gamma)$$

و بفرض $c = \frac{aC_\alpha + bC_\beta}{C_\gamma}$ عبارت فوق بدینصورت درمیآید

$$x = cC_\gamma(\omega t + \gamma)$$

برای تبدیل عبارات $\tan\gamma = \frac{aS_\alpha + bS_\beta}{aC_\alpha + bC_\beta}$ و

$c = \frac{aC_\alpha + bC_\beta}{C_\gamma}$ میتوان چنین نوشت :

$\tan\gamma = \frac{S_\alpha}{C_\alpha} \times \frac{1 + \frac{bS_\beta}{aS_\alpha}}{1 + \frac{bC_\beta}{aC_\alpha}}$ و بفرض $\frac{bS_\beta}{aS_\alpha} = \tan\varphi$

و $\frac{bC_\beta}{aC_\alpha} = \tan\varphi'$ رابطه اخیر چنین میشود :

$$\tan\gamma = \tan\alpha \frac{1+\tan\varphi}{1+\tan\varphi'} = \tan\alpha \frac{C_{\varphi'}S_{\frac{\pi}{4}+\varphi}}{C_\varphi S_{\frac{\pi}{4}+\varphi'}} \quad (1)$$

تساوی c را میتوان مرتبا چنین نوشت :

$$c = \frac{aC_\alpha}{C_\gamma}(1 + \frac{bC_\beta}{aC_\alpha}) = \frac{aC_\alpha}{C_\gamma}(1 + \tan\varphi')$$

و از آنجا $c = \frac{a\sqrt{2}C_\alpha S_{\frac{\pi}{4}+\varphi'}}{C_\gamma C_{\varphi'}}$ (۲)

از روابط (۱) و (۲) که قابل محاسبه بوسیله لگاریتم میباشند میتوان مقادیر

c و γ را حساب نمود

میتوان بوجه هندسی تبدیل عبارت x را بعبارت $c C_\gamma(\omega t+\gamma)$ تحقیق نمود

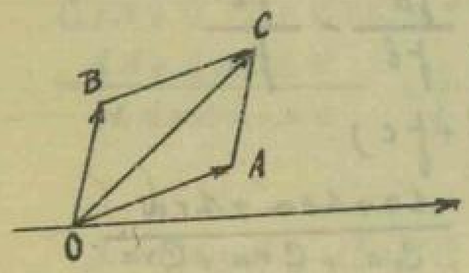
فرض میکنیم دو حامل $OA = a$ و $OB = b$ بترتیب با محور ox زوایای

$(\widehat{ox, OA}) = \omega t + \alpha$ ، $(\widehat{ox, OB}) = \omega t + \beta$ را تشکیل دهند حال چون

ملاحظه کنیم که $(OC) = (OA) + (OB)$ میباشد

از تصویر رابطه هندسی فوق بر محور ox حاصل میشود :

$$\text{proj}_{ox}(OC) = \text{proj}_{ox}(OA) + \text{proj}_{ox}(OB)$$



و یا

$$aC_{(\omega t+\alpha)} + bC_{(\omega t+\beta)} = oc\, C_{(\widehat{oc, ox})}$$

بطوریکه اگر طول oc را برابر با c و زاویه $(\widehat{oc, ox})$ را برابر با $\omega t+\gamma$

فرض میکنیم تبدیل فوق همواره ممکن میباشد

تمرینات

۷۷- عبارات ذیل را بحاصلضرب عوامل تبدیل کنید

$1+2C_a+C_{2a}$	$1+2\lambda_a-C_{2a}$
$1+C_a+\lambda_a$	$1-C_a+\lambda_a$
$\lambda^2_{2a}-\lambda^2_a$	$C^2_{0a}-\lambda^2_{2a}$
$1\pm2C_a \quad 1\pm2\lambda_a$	$1\pm\sqrt{2}C_a \quad 1\pm\sqrt{2}\lambda_a$
$\lambda_a C_a-\frac{1}{4}$	$\lambda_a\pm\lambda_{2a}$
$\frac{1}{4}{}^2_{2a}-\frac{1}{4}{}^2_a$	$\frac{1}{4}{}_a\pm2\lambda^2_a$
$\lambda_{2a}-\lambda_{2a}+\lambda_a$	$1-2C^2_{2a}$
$\frac{\lambda(a+b)}{\lambda a\pm\lambda b}$	$\frac{C^2_a-C^2_b}{\lambda(a-b)}$
$\frac{\lambda a-\lambda b}{\frac{1}{4}a-\frac{1}{4}b}$	$\frac{\frac{1}{4}a}{\frac{1}{4}b}-\frac{\frac{1}{4}b}{\frac{1}{4}a}$
$\frac{1}{4}(a+b+c) \quad -(\frac{1}{4}a+\frac{1}{4}b+\frac{1}{4}c)$	
$\frac{\lambda_{2a}-\sqrt{2}\lambda_a}{\lambda_{2a}+\sqrt{2}\lambda_a}$	$\frac{\lambda_a+\lambda_{4a}+\lambda_{2a}}{C_a+C_{2a}+C_{3a}}$

$$\frac{\lambda_{2a}+C_{2a}+\lambda_{3a}+C_{4a}+\lambda_{5a}+C_{6a}}{C_{2a}+C_{4a}+C_{6a}}$$

۷۸- عبارت $1+\lambda_z+C_x+\lambda_x C_x$ را بحاصلضرب عوامل تبدیل کنید و حاصل را بصورت ترتیب مجموع دو جیب تمام درآورده و قسمی که x بین صفر و 2π باشد تعیین کنید که عبارت فوق ماکزیمم یا مینیمم شود

۷۹- اگر A ، B ، C زوایای مثلثی باشند مطلوبست تبدیل عبارات ذیل

بحاصلضرب عوامل :

$C_A+C_B-C_C-1$	$\lambda A+\lambda B-\lambda C$
$\lambda_{2A}+\lambda_{2B}-\lambda_{2C}$	$\lambda_{2A}+\lambda_{2B}+\lambda_{2C}$
$\lambda\frac{A}{2}+\lambda\frac{B}{2}-\lambda\frac{C}{2}+1$	$C_{\frac{A}{2}}+C_{\frac{B}{2}}+C_{\frac{C}{2}}$
	$\frac{1}{2}{}_{2A}+\frac{1}{2}{}_{2B}+\frac{1}{2}{}_{2C}$

۸۰- ثابت کنید که در هر مثلث این رابطه برقرار است :

$$\frac{C_A}{\lambda_B\lambda_C}+\frac{C_B}{\lambda_A\lambda_C}+\frac{C_C}{\lambda_B\lambda_A}=2$$

$$\lambda_{2A}+\lambda_{2B}+\lambda_{2C}=4\lambda_A\lambda_B\lambda_C$$

$$C_{2A}+C_{2B}+C_{2C}+4C_AC_BC_C+1=0$$

$$\frac{\lambda A+\lambda B-\lambda C}{\lambda A+\lambda B-\lambda C}=\frac{1}{2}\frac{A}{2}\cdot\frac{1}{2}\frac{B}{2}$$

۸۱- صحت اتحادهای ذیل را تحقیق کنید :

$$\lambda 15^\circ\lambda 75^\circ=C_{15^\circ}C_{75^\circ}=\frac{1}{4}$$

$$\lambda 75^\circ\lambda 70^\circ\lambda 40^\circ\lambda 10^\circ=\frac{3}{16}$$

$$\frac{1}{2}{}_{20^\circ}\frac{1}{2}{}_{40^\circ}\frac{1}{2}{}_{80^\circ}\frac{1}{2}{}_{160^\circ}=3$$

$$\frac{\lambda_{2a}}{\lambda_a}-2C_a=2$$

$$\frac{\lambda_{3a}}{\lambda_a}-2(C_{2a}+C_{4a})=1$$

$$\frac{\lambda_{4a}}{\lambda_a}-2(C_{2a}+C_{4a}+C_{6a})=1$$

$$\lambda_z+\lambda_{(x+\frac{2\pi}{3})}+\lambda_{(x+\frac{4\pi}{3})}=0$$

tarikhema.org
PDF.tarikhema.org

۸۴- عبارات ذیل را بحاصلضرب عوامل تبدیل کنید :

$$S = \lambda x + \lambda(x+\alpha) + \lambda(x+2\alpha) + \dots + \lambda[x+(n-1)\alpha]$$

$$S' = C x + C(x+\alpha) + C(x+2\alpha) + \dots + C[x+(n-1)\alpha]$$

(بوسیله ضرب طرفین تساویهای فوق در $2\lambda\frac{\alpha}{2}$ و تبدیل هر جمله بحاصل جمع)

۸۳- مطلوبست تعیین قوسهای x ریشه‌های معادله ذیل وقتیکه بین $-\pi$ و π باشند

$$\lambda x + \lambda 2x + \lambda 3x = 1 + C x + C 2x$$

۸۴- معادلات ذیل را حل کنید :

$$2\lambda x \cdot \lambda 2x = 1$$

$$1 + C x + C 2x + C 3x = 0$$

$$C(x+\tfrac{\pi}{6})\, C(x-\tfrac{\pi}{6}) = \tfrac{1}{2}$$

$$\lambda(x+\tfrac{\pi}{3})\, C x = \frac{1+\sqrt{3}}{4}$$

$$\operatorname{tg}(a+x)\operatorname{tg}(a-x) = \frac{1-2C 2a}{1+2C 2a}$$

۸۵- بفرض $a+b=c$ ثابت کنید که :

$$C^2 a + C^2 b + C^2 c - 2 C a\, C b\, C c = 1$$

۸۶- اگر $a+b+c=\pi$ باشد صحت روابط ذیل را ثابت کنید :

$$\operatorname{ctg}\frac{a}{2} + \operatorname{ctg}\frac{b}{2} + \operatorname{ctg}\frac{c}{2} = \operatorname{ctg}\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{b}{2}\operatorname{ctg}\frac{c}{2}$$

$$\lambda n a + \lambda n b + \lambda n c = 4\lambda\tfrac{n\pi}{2}\, C\tfrac{na}{2}\, C\tfrac{nb}{2}\, C\tfrac{nc}{2}$$

۸۷- بفرض $\lambda x = \frac{\lambda a + \lambda b}{1 + \lambda a\, \lambda b}$ ثابت کنید که

$$\operatorname{tg}(\tfrac{a}{2}+\tfrac{\pi}{4})\operatorname{tg}(\tfrac{b}{2}+\tfrac{\pi}{4}) \pm \operatorname{tg}(\tfrac{x}{2}+\tfrac{\pi}{4}) = 0$$

۸۸- اگر $\lambda x + \lambda y = \lambda x\, \lambda y$ باشد صحت رابطه ذیل را ثابت کنید

$$\left(C\frac{x-y}{2} - \lambda\frac{x+y}{2}\right)^2 = 1$$

۸۹- اگر عبارات $\lambda(b+c-a)$ و $\lambda(c+a-b)$ و $\lambda(a+b-c)$ جمل متوالیه تصاعدی حسابی باشند ثابت کنید که

a و b و c نیز جزء جمل متوالیه تصاعدی حسابی خواهند بود

۹۰- مطلوبست تعیین قوسهای x برحسب درجه و گراد و رادیان در صورتیکه

$$\lambda x = -\frac{2}{3} \quad , \quad C x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{ctg} x = -\frac{5\sqrt{2}}{3} \quad , \quad \operatorname{tg} x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

۹۱- مطلوبست محاسبهٔ عبارات ذیل بوسیلهٔ لگاریتم :

$$\sqrt{24{,}3052 - 11{,}2252}$$

$$\sqrt{39{,}7252 + 26{,}3247 - 28\,31{,}25 \cdot 24{,}2525\, C(72°,43')}$$

$$1 + \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \lambda^2 a + \lambda^2 b - \lambda^2(a+b)$$

$$\lambda^2(a-b) + \lambda^2(b-c) + \lambda^2(c-a)$$

۹۲- مطلوبست محاسبه قوسهای x ریشه‌های معادلات

$$x = \sqrt{\lambda^2\alpha\, \lambda^2\beta - C^2\alpha\, C^2\beta}$$

$$\tan 3x = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1-\cos 2\beta}}$$

درصورتیکه $\alpha = 51^\circ\ 37'\ 17''$ و $\beta = 63^\circ\ 14'\ 25''$ باشد

۹۴- مطلوبست محاسبهٔ قوس x از رابطهٔ $\sin x = \sqrt{a^2 \sin^2 z + b^2 \cos^2 z}$

وقتیکه $a = 25{,}675$ و $b = 12{,}5$ گرم و $z = 135^\circ 25'$ باشد

۹۳- مطلوبست محاسبهٔ قوسهای x ریشه‌های معادلات ذیل :

$$\tan 3x = a + \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\sin x = \frac{4(a-b)\sqrt{ab}}{(a+b)^2}$$

$$\tan x = 2\tan\alpha + \sqrt{5}\cot\alpha$$

وقتیکه $a = 3$ و $b = \sqrt{2}$ و $\alpha = 30^\circ 51' 42''$

۹۵- مطلوبست محاسبه ریشه‌های معادلات ذیل بوسیلهٔ نگارتیم

$$x^2 + 140x + 7431 = 0$$

$\alpha = 54^\circ\ 18'\ 25''$

$$x^2 \tan\alpha + 2x - \tan\alpha = 0$$

$$a\cos^2 z - 3\cos z + 1 = 0$$

فصل هفتم - معادلات و نامعادلات مثلثاتی

معادلات مثلثاتی تساوی دو عبارت را گویند که شامل خطوط مثلثاتی یک یا چند قوس بوده و تساوی طرفین بازاء بعضی از مقادیر این قوسها محقق میشود

این مقادیر را جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی نامند

۱- معادلهٔ یکمجهولی

۶۵- یک معادلهٔ مثلثاتی یک مجهولی دارای جوابهای بیشمار است ممکن است که این جوابها را بدسته‌جات مختلفه تقسیم نمود بقسمیکه اختلاف بین جوابهای هر دسته مضربی صحیح از π باشد حال اگر قوسهای هندسی مختلفه که جواب معادلهٔ مثلثاتی مفروضند تعیین شود میتوان صورکلی جوابهای معادلهٔ مفروض را تعیین نمود

برای حل معادلات مثلثاتی یک مجهولی دو حالت ذیل را میتوان تشخیص داد :

حالت اول - درصورتیکه معادلهٔ مفروض فقط شامل یکی از خطوط مثلثاتی قوس مجهول باشد در اینصورت باید همان خط مثلثاتی را مجهول معادن قرار داده معادله را نسبت بآن مجهول حل نمود بعد از تعیین آن خط مثلثاتی قوسهائیکه خطوط مثلثاتی آنها با آن برابرند جواب معادله خواهند بود

مثال ۱ - معادلهٔ ذیل را حل کنید $2\cos z - 1 = 0$

چون $\cos z$ را مجهول معادن قرار دهیم حاصل میشود $\cos z = \frac{1}{2}$ و یا

$\cos z = \cos\frac{\pi}{3}$ و از آنجا $z = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

مثال ۲ - مطلوبست حل و بحث معادله ذیل :

$$۲m\sin^۲x - \sin x - m + ۱ = ۰ \qquad (۱)$$

چون $\sin x$ را که همواره محصور بین ۱ و ۱- میباشد مجهول معاون قرار داده آنرا مساوی y فرض کنیم حل معادله فوق منجر بحل معادله شرطیه ذیل میگردد :

$$(۲)\begin{cases} ۲my^۲ - y - m + ۱ = ۰ \\ -۱ < y < ۱ \end{cases}$$

از حل معادله درجه دوم فوق حاصل میشود :

$$y = \sin x = \frac{۱ \pm \sqrt{۸m^۲ - ۸m + ۱}}{۴m}$$

بحث - اولاً شرط آنکه معادله (۲) دارای یک جواب باشد آنستکه $f(۱)f(-۱) < ۰$

و یا $m(m+۲) < ۰$ و از آنجا $-۲ < m < ۰$

ثانیاً برای آنکه معادله (۲) دارای دو جواب قابل قبول باشد آنستکه :

$m \leq \frac{۲-\sqrt{۲}}{۴}$ یا $m \geq \frac{۲+\sqrt{۲}}{۴}$ و از آنجا $۸m^۲ - ۸m + ۱ \geq ۰$ یا $\Delta \geq ۰$

که همیشه محقق است $af(۱) > ۰$ یا $۲m^۲ > ۰$

$m < -۲$ یا $m > ۰$ و از آنجا $m(m+۲) > ۰$ یا $af(-۱) > ۰$

$m < -۲$: $m > ۰$ از آنجا $m(m+۲) > ۰$: $-۲ < \frac{S}{۲} < ۱$

برای تعیین جوابهای مشترک نامساویهای فوق جدول ذیل را تشکیل میدهیم

m	$-\infty$	-۲	$-\frac{۱}{۴}$	۰	$\frac{۲-\sqrt{۲}}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۲+\sqrt{۲}}{۴}$	$+\infty$
$\Delta > ۰$	+	+	+	+	+	+	−	+
$af(۱) > ۰$	+	+	+	+	+	+	+	+
$af(-۱) > ۰$	+	−	−	−	+	+	+	+
$-۱ < \frac{S}{۲} < ۱$	−	−	−	+	+	+	−	−
نتیجه	دو جواب	دو جواب	یک جواب	یک جواب	مقتنع	مقتنع	مقتنع	دو جواب

بنابراین شرط آنکه معادله دارای دو جواب بین ۱ و ۱- باشد آنستکه : $m < -۲$

و یا $m \geq \frac{۲+\sqrt{۲}}{۴}$

مثال ۲ معادله $\sqrt{\cos x + m\cos^۲ x} = ۱ - ۲\cos x$

بازاء مقادیر مختلفه m حل و بحث کنید

چون $\cos x$ را به y تبدیل نموده معادله را مرتفع کنیم دستگاه شرطیه ذیل نتیجه میشود

$$\begin{cases} y + my^۲ = (۱-۲y)^۲ \\ ۱ - ۲y \geq ۰ \\ -۱ \leq y \leq ۱ \end{cases} \quad \text{و یا} \quad \begin{cases} (m-۴)y^۲ + ۵y - ۱ = ۰ \\ -۱ \leq y \leq \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

PDF.tarikhema.org

چون مانند مسئلهٔ قبل معادله اخیر را بحث نمائیم جدول ذیل نتیجه میشود

m	Δ	a	$\varphi(-1)$	$f(\frac{1}{2})$	نتیجه
$-\infty$					
	−	−	−	−	بدون جواب
					دو قوس ..... $y'=y''=\frac{2}{5}$
$-\frac{9}{4}$	0				
	+	−	−	−	چهار قوس ... $\frac{1}{2}$ y'' y' -1
-2					
	+	−	−	+	چهار قوس .....
					دو قوس ..... $y=\frac{1}{5}$
4	0				
	+	+	−	+	دو قوس .... $\frac{1}{2}$ y'' -1 y'
					سه قوس ... $\frac{1}{2}=y''$ $-1=y'$
10					
	+	+	+	+	چهار قوس ..... $\frac{1}{2}$ y'' y' -1
$+\infty$					

مثال ۲- بازاء چه مقادیری از m ریشهٔ معادله $t^2+\frac{2}{3}t+m=0$ بین صفر و $\frac{3\pi}{2}$ است

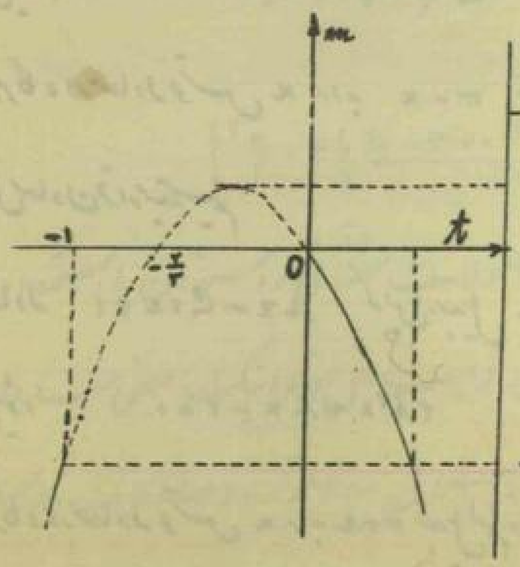
شرط اخیر را میتوان چنین نوشت $0<\frac{3\pi}{2}$ ازاین شرط معلوم میشود که $\frac{2}{3}t$ باید خارج فاصله $(0\ و\ -1)$ باشد لذا بازاء هر مقدار $\frac{2}{3}t$ خارج این فاصله مقداری برای x بدست میآید که در نامساوی فوق صدق نموده و در نتیجه جواب مسئله میباشد حال اگر $\frac{2}{3}t$ را به t نمایش دهیم دستگاه شرطیه ذیل حاصل میشود.

$$(1)\quad \begin{cases} t^2+\frac{2}{3}t+m=0 \\ t \text{ خارج } (0\ و\ -1) \end{cases}$$

معادله شرطیه فوق را میتوان بطریقه ذیل بحث نمود :

معادله فوق را بدینصورت $t^2+\frac{2}{3}t=-m$ نموده و بنحوی نمایش تغییرات m را رسم میکنیم حال با رعایت اینکه t باید خارج صفر و -1 باشد مقادیر t جواب های معادله عبارت خواهند بود از طولهای نقاطی از منحنی که در خارج 0 و -1 بوده و در شکل با خط پیوسته نمایش داده شده است

حال ملاحظه میکنیم که اگر $m>0$ باشد معادله دارای جواب نمیباشد و اگر $0>m>-1$ باشد دارای یک جواب و اگر $m<-1$ باشد معادله دارای دو جواب خواهد بود



جوابهای مسئله	ریشه‌های معادله (۱)	m
بدون جواب	بدون جواب	$+\infty$
		$\frac{1}{2}$
یک جواب صفر	$t=0$ و $t=\frac{1}{2}$ t' t'' -1	0
یک جواب	$t=0$ و $t=-1$	
$t=0$ و $t=\frac{2}{3}$	$t=\frac{1}{2}$ و $t=-1$	-1
دو جواب	$t=0$ و $t=-\frac{2}{3}$	

حالت دوم - معادلهٔ مفروض شامل چندین خط مثلثاتی و قوس مجهول میباشد در اینصورت باید یکی از خطوط مثلثاتی را مجهول معاون قرار داده سایر خطوط مثلثاتی را بهمان خط تبدیل نموده و معادله را بصورت حالت اول در آورده حل نمود

حال برای انتخاب مجهول معاون میتوان بقاعده ذیل که باسم Biocche معروف است عمل نمود

۶۶- **قاعده بیوش** - هرگاه در معادلهٔ قوس x را به x- تبدیل کنیم و معادله تغییر نکند $\cos x$ را مجهول معاون قرار میدهیم

مانند معادله $1 = \cos x + \sin^2 x$ کپس از تبدیل $\sin^2 x$ به $1 - \cos^2 x$

حاصل میشود $\cos^2 x - \cos x = 0$

۲- هرگاه در معادله قوس x را به $\pi - x$ تبدیل کنیم و معادله تغییر نکند $\sin x$ را مجهول معاون قرار میدهیم

مانند معادله $1 = \cos 2x - \sin x$ کپس از تبدیل $\cos 2x$ به $1 - 2\sin^2 x$

حاصل میشود $2\sin^2 x + \sin x - 2 = 0$

۳- هرگاه در معادله قوس x را به $\frac{\pi}{2} + x$ تبدیل کنیم و معادله تغییر نکند $\tan x$

را مجهول معاون قرار میدهیم

مانند معادله $\sin x + \cos x = 1$ کپس از تقسیم طرفین بر $\cos x$

حاصل میشود :

$$\tan^2 x - \tan x - 1 = 0$$

۴- بالاخره هرگاه در معادله قوس x را به $x-$ یا به $\pi - x$ یا به $\pi + x$ تبدیل کنیم و معادله تغییر کند $\tan \frac{x}{2}$ را مجهول معاون قرار میدهیم

مانند معادلهٔ $\frac{1}{2} = \cos x - \sin x$ کپس از تبدیل $\sin x$ و $\cos x$ برحسب $\tan \frac{x}{2}$

حاصل میشود :

$$\tan^2 \frac{x}{2} + 4\tan \frac{x}{2} - 3 = 0$$

غیر از قواعد فوق اغلب معادلات مثلثاتی را میتوان با استمداد از دستورات موجوده مابین خطوط مثلثاتی قوسها حل نمود اینک بعضی معادلات را که در مثلثات بیشتر مورد استعمال پیدا نموده و بمعادلات کلاسیک موسومند حل میکنیم .

مسئلهٔ ۱ـ مطلوبست حل و بحث معادلهٔ کلاسیک $a\sin x + b\cos x = c$ (۱)

طریقهٔ اوّل ـ معادلهٔ (۱) برحسب مجهول $\sin x$ چنین میشود :

$$a\sin x \pm b\sqrt{1-\sin^2 x} = c$$

چون رادیکال را تنها گذارده طرفین را مربّع کنیم بدون داخل شدن ریشهٔ خارجی

پس از اجرای اعمال لازمه معادلهٔ فوق بدینصورت درمیآید :

$$(a^2+b^2)\sin^2 x - 2ac\sin x + c^2 - b^2 = 0 \quad (۳)$$

بحث ـ برای اینکه معادلهٔ (۱) دارای ریشه‌های قابل قبول باشد باید ریشه‌های معادلهٔ (۲) حقیقی و بین ۱ و ۱- واقع باشند از معادلهٔ :

$$(c - a\sin x)^2 = (1-\sin^2 x)b^2$$

معلوم میشود که اگر ریشهٔ موجود باشد قطعاً بین ۱ و ۱- واقع میشود پس تنها شرط امکان مسئله مثبت بودن Δ یعنی $a^2+b^2 \geq c^2$ است

طریقهٔ دوّم ـ چون $\tan\frac{x}{2}$ را مجهول اختیار کنیم معادلهٔ (۱) پس از اجرای اعمال

لازمه چنین میشود $(c+b)\tan^4\frac{x}{2} - 2a\tan^2\frac{x}{2} + c - b = 0$ (۳)

بحث ـ چون $\tan\frac{x}{2}$ محدود نبوده و میتواند جمیع مقادیر را دارا گردد بنابراین

شرط جواب آنست که معادلهٔ (۲) دارای ریشه‌های حقیقی باشد لذا باید :

$$\Delta \geq 0 \quad \text{یا} \quad a^2 - (c-b)(c+b) \geq 0 \quad \text{و از آنجا} \quad a^2 + b^2 \geq c^2$$

طریقهٔ سوّم ـ در حل بعضی معادلات اِعمال طرق سابق بحاسبات مشکل منجر میشود

بوسیلهٔ این طریقه میتوان محاسبات را ساده‌تر نمود

چون طرفین معادلهٔ (۱) را بر a تقسیم کنیم چنین میشود :

$$\sin x + \frac{b}{a}\cos x = \frac{c}{a}$$ حال اگر $\frac{b}{a}$ را مساوی

$\tan\varphi$ فرض کنیم و طرفین معادلهٔ اخیر را در $\cos\varphi$ ضرب نمائیم معادلهٔ :

$$\sin x\cos\varphi + \cos x\sin\varphi = \frac{c}{a}\cos\varphi$$ و یا :

$$\sin(x+\varphi) = \frac{c}{a}\cos\varphi \quad (۴)$$ نتیجه میشود از این معادله $x+\varphi$ و از آنجا و نیز x معلوم میشود

بحث ـ برای اینکه معادلهٔ (۴) دارای جواب باشد باید $\left|\frac{c}{a}\cos\varphi\right| \leq 1$ یا

$\frac{c^2}{a^2}\cos^2\varphi \leq 1$ و چون $\cos^2\varphi = \frac{1}{1+\tan^2\varphi}$ و

$\tan\varphi = \frac{b}{a}$ میباشد پس شرط امکان مسئله چنین میشود $\frac{b^2}{a^2+b^2} \leq \frac{c^2}{a^2+b^2}$ و یا

$a^2+b^2 \geq c^2$

تبصره - باید دانست که بطریقه اخیر وقتی معادله (۱) را حل میکنند که ضرایب a و b و c مقادیر عددی بوده و مقصود محاسبه مقدار عددی قوس x باشد و در موقعیکه ضرایب فوق بپارامتری بستگی داشته باشند چون بطریقه اول و دوم حل و بحث مسئله بنحو کامل و بحث معادله درجه دوم میگردد لذا بحث معادله ساده تر میشود

مسئله ۲ - مطلوبست حل و بحث معادله کلاسیک :

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d$$

طریقه اول - این طریقه وقتی عملی است که ضرایب مقادیر عددی باشند میدانیم که

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \quad \text{و} \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad \text{و}$$

$$\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

لذا معادله فوق پس از اختصار چنین میشود :

$$b\sin 2x + (c-a)\cos 2x = 2d - a - c$$

معادله اخیر نظیر معادله کلی $a\sin x + b\cos x = c$ میباشد بطوریکه میدانیم شرط جواب آنستکه $(2d-a-c)^2 + (c-a)^2 \geq b^2$ و یا $a^2 + 2ac + c^2 - 4ad - 4cd \geq b^2$

طریقه دوم - اگر ضرایب شامل پارامتری باشند در اینصورت طرف ثانی معادله

اصلی را در $2\cos^2 x$ ضرب نموده طرفین معادله حاصل را بر $2\cos^2 x$ تقسیم مینمائیم تا معادله ذیل حاصل شود :

$$(2d-a-c)\tan^2 x + 2b\tan x + c - a = d(1+\tan^2 x)$$

معادله اخیر معادله درجه دومی است بر حسب $\tan x$ که آنرا بسهولت میتوان حل و بحث نمود

تبصره - بطور کلی طریقه دوم را که در فوق بیان نمودیم در کلیه معادلاتیکه در آنها $\sin x$ و $\cos x$ مجهول بوده و درجه کلیه جمل آن بر حسب $\sin x$ و $\cos x$ زوج باشد میتوان عمل نمود باین طریق که ابتدا بوسیله ضرب کلیه جمل باستثنای جمله که دارای بزرگترین نماینده است در یکی از قوای $\cos^2 x + \sin^2 x$ تمام جمل را از حیث درجه یکی میکنیم و بعد طرفین را بر قوتی از $\cos x$ برابر با درجه مشترک جمل تقسیم میکنیم باین طریق معادله بر حسب $\tan x$ بدست میآید

مثال - معادله ذیل را حل کنید :

$$8\sin^3 x\cos x - 3\sin^2 x + 2\sin^2 x\cos^2 x = 1$$

چون جمله دوم طرف اول را در $\cos^2 x + \sin^2 x$ و طرف ثانی را در

$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2$ ضرب کنیم پس از اختصار حاصل میشود :

$$\sin^4 x - \sin^3 x \cos x + 3\sin^2 x \cos^2 x = 0$$

که پس از تقسیم طرفین بر $\cos^4 x$ معادله ذیل نتیجه میشود :

$$3\tan^4 x - 8\tan^3 x + 3\tan^2 x = 0$$

که بسهولت آنرا میتوان حل نمود

مسئله ۳ - مطلوبست حل و بحث معادلهٔ کلاسیک :

$$a(\sin x + \cos x) + b\sin x \cos x = c \qquad (1)$$

طریقهٔ اول - معادله (۱) را بترتیب میتوان چنین نوشت :

$$a\left[\sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] + \frac{1}{2}b\sin 2x = c$$

$$2a\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}b\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = c$$

$$2a\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + b\left[2\cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1\right] = 2c$$

$$2b\cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2a\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - b - 2c = 0 \qquad (2)$$

معادله (۲) معادله یک مجهولی درجهٔ دومی است برحسب $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ که میتوان آنرا حل و بحث نموده بوسیله آن ریشه‌های معادلهٔ (۱) را تعیین نمود

طریقهٔ دوم - چون $\sin x \cos x$ را مساوی y قرارداده طرفین آنرا مربع کنیم معلوم میشود که $1 + 2\sin x \cos x = y^2$ و یا $\sin x \cos x = \frac{y^2 - 1}{2}$

و از آنجا معادله (۱) بدینصورت درمیآید :

$$by^2 + 2ay - (b + 2c) = 0$$

از حل این معادله y معلوم میشود برای تعیین x باید معادله $\sin x + \cos x = y$ را حل نمود چنانکه میدانیم این معادله قابل تبدیل بصورت $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{y}{\sqrt{2}}$ میباشد لذا از معادله اخیر معلوم میشود که $-\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2}$ و بنابراین حل و بحث معادلهٔ (۱) بحل و بحث معادله شرطیه ذیل منجر میشود :

$$\begin{cases} by^2 + 2ay - (b + 2c) = 0 \\ -\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2} \end{cases}$$

مسئله ۴ - مطلوبست حل و بحث معادله کلاسیک $a\sin 9x = b\sin 4x$ (۱)

درصورتیکه a و b مقادیر معلوم باشند

از رابطه (۱) معلوم میشود که قوسهای $9x$ و $4x$ دارای یک جیب لذا یا متکمل‌اند و یا اختلافشان مضرب محیط دایره است پس میتوان نوشت :

$\tan 4x = \tan 360K - 9x$ و $\tan 4x = \tan 360K + 180 - 9x$

اگر $4 + 9 \neq 0$ باشد چنین میشود : $x = \frac{360K}{4-9}$

و $x = \frac{360K + 180}{4+9}$

اگر $4 + 9 = 0$ باشد در اینصورت معادلهٔ (۱) مماثله بوده و بازاء جمیع مقادیر x محقق است

تبصرهٔ ۱ — بهمین طریق بسهولت معادلات $\cot 4x = \cot 9x$ و $\tan 4x = \cot 9x$ و $\sin 4x = \cos 9x$ را حل نمود اگر $\cot 9x = \tan 4x$ باشد میتوان معادله اخیر را بدینصورت $\tan(\frac{\pi}{2} - 9x) = \tan 4x$ نوشته بعد طریقه حل معادلهٔ (۱) را در بارهٔ آن مجری داشت

تبصرهٔ ۲ — اگر 4 و 9 اعداد صحیح باشند ممکن است معادلات فوقرا بوسیلهٔ ذیل حل نمود مثلاً در معادله (۱) $\tan 4x$ و $\cot 9x$ را بتبدیل بعبارتی برحسب $\tan x$ نموده تا معادله یک مجهولی نسبت به $\tan x$ تشکیل شود

ب — نامعادلات مثلثاتی

۶۷ — برای حل نامعادلهٔ مثلثاتی قاعدهٔ حل نامعادلات جبری را باید بکار برد یعنی ابتدا

جمیع حل را بیک طرف نامساوی نقل نموده و پس از انجام اعمال لازمه عبارت مفروض را بحاصلضرب عوامل تبدیل و علامت هریک از آنها را در فواصل جوابها تحقیق میکنیم و از تقاطع علامات جوابهای نامعادله را بدست میآوریم

مثال ۱ — مطلوبست حل نامعادله $2\sin x - \sqrt{3} > 0$ وقتیکه $0 < x < \frac{2\pi}{3}$ باشد

برای تحقیق علامت $2\sin x - \sqrt{3}$ آنرا مساوی صفر قرار میدهیم در اینصورت حاصل میشود $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ که جوابهای مابین صفر و 2π عبارت میگردد از $x = \frac{\pi}{3}$ و $x = \frac{2\pi}{3}$ بنابراین جدول ذیل را بسهولت میتوان تشکیل داد :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		2π
$2\sin x - \sqrt{3}$		—	0	$+$	0	—	
نتیجه	جواب نیست		جواب	جواب نیست			

از اینقرار جواب نامعادله فوق عبارت میگردد از $\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$

مثال ۲ — مطلوبست حل نامعادله $\frac{\cos 2x + \cos x - 1}{\cos 2x} > 0$ بفرض $0 < x < 2\pi$

نامعادلهٔ فوق را مرتباً بصورت ذیل میتوانیم نوشت : $\frac{\cos 2x + \cos x - 1}{\cos 2x} - 2 < 0$

و یا $\frac{-\cos 2x + \cos x - 1}{\cos 2x} < 0$ و یا $\frac{\cos x - 2\cos^2 x}{\cos 2x} > 0$

PDF.tarikhema.org

و از آنجا $\cos x(1-2\cos x)>0$ حال جوابهای $\cos x=0$ و $\cos x=0$ و $1-2\cos x=0$ را که محصور بین صفر و 2π میباشند بدست آورده علامت هریک را در فواصل جوابها تحقیق و جدول ذیل را مرتب مینمائیم :

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\cos x$	+		0	−					0	+
$\cos 2x$	+	0	−		0	+	0	−	0	+
$1-2\cos x$	−		0	+				0	−	
علامت حاصل	−	+	−	+	−	+	−	+	−	

بنابراین جوابهای نامعادله محصور مابین صفر و 2π عبارت خواهند بود از :

$\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{4}<x<\frac{5\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{2}<x<\frac{5\pi}{3}$

و $\frac{7\pi}{4}<x<2\pi$

ج - حل دستگاههای چند مجهولی

۶۸ - اگر معادلات دستگاههای چند مجهولی مثلثاتی فقط شامل خطوط مثلثاتی

قوسهای مجهول باشد مانند طریقه که در حل معادلات یکمجهولی ذکر نمودیم باید عمل نمود یعنی باید کلیه خطوط مثلثاتی هر قوس مجهول را بیکی از خطوط مثلثاتی آن قوس تبدیل نمود تا دستگاه مثلثاتی بیک دستگاه چند مجهولی معمولی تبدیل شود

گاه ممکن است که معادلات دستگاه شامل خطوط مثلثاتی قوسها و خود قوسها نیز باشد در اینحال نمیتوان قاعده کلی برای حل این قبیل دستگاهها بدست آورد ولیکن در دستگاههای دو مجهولی که یکی از معادلات آن فقط شامل مجموع یا تفاضل دو قوس مجهول بوده و معادله دیگر شامل خطوط مثلثاتی آن دو قوس باشد اغلب ممکن است بکمک از دستورات (۳۵ و ۳۶) در صورت معلوم بودن تفاضل مجموع دو قوس و در صورت معلوم بودن مجموع تفاضل دو قوس را تعیین نمود در اینصورت دستگاه فوق تبدیل بدستگاه دو مجهولی ساده میشود من باب مثال بحل مسائل ذیل میپردازیم

مسئله ۱ - مطلوبست حل دستگاه دو مجهولی :

$$\left|\begin{array}{l} a\sin x+b\sin y=c \\ a'\cos x+b'\cos y=c' \end{array}\right| \quad (1)$$

چون $\sin x$ را به x و $\sin y$ را به y بنامیم دستگاه (۱) چنین میشود

$$\left|\begin{array}{l} ax+by=c \\ \frac{a'}{x}+\frac{b'}{y}=c' \end{array}\right| \quad (2)$$

چون از معادلهٔ اول دستگاه اخیر y را تعیین نموده در معادلهٔ دوم گذاریم معادلهٔ یکمجهولی ذیل نتیجه میشود : $(aa'+bb'-cc')x+a'c=0$ (۵)

بحث - تنها شرط امکان مسئله مثبت بودن مبین معادلهٔ (۳) است اگر این شرط موجود باشد دو مقدار برای x و از آنجا دو مقدار نیز برای y بدست میآید

مسئلهٔ ۲ - مطلوبست حل دستگاه

$$\left|\begin{array}{l} \cos x+\cos y=a \\ \sin x+\sin y=b \end{array}\right. \quad (۱)$$

حل دستگاه (۱) بوسیلهٔ تبدیل مجهولات بقوس نصف قوس مثلثی منجر بحل معادلهٔ درجهٔ چهارم میشود لذا بطریقهٔ ساده ذیل عمل میکنند :

دستگاه فوق را میتوان چنین نوشت $\left|\begin{array}{l} 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=a \\ 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=b \end{array}\right.$ (۲)

از تقسیم این دو معادله $\frac{b}{a}=\tan\frac{x+y}{2}$ (۳) و از آنجا $\frac{x+y}{2}$ معلوم میشود و چون در یکی از معادلات دستگاه (۲) بجای $\frac{x+y}{2}$ مساویش را قرار دهیم $\frac{x-y}{2}$ نیز بدست میآید $\cos\frac{x-y}{2}=\frac{a}{2\cos\frac{x+y}{2}}$ (۴)

بحث - ریشهٔ معادلهٔ (۳) همیشه قابل قبول است برای اینکه ریشهٔ معادلهٔ (۴)

قابل قبول باشد باید $\left|\frac{a}{2\cos\frac{x+y}{2}}\right|\leq 1$ و یا با ملاحظهٔ تساوی (۳)، شرط وجود ریشه‌های دستگاه چنین است $a^2+b^2\leq 4$

اگر این شرط موجود باشد زاویهٔ α را قسمی میتوان یافت که $\tan\alpha=\frac{b}{a}$ ولذا $\frac{x+y}{2}=\alpha+180^\circ K$ (۵) پس $\cos\frac{x-y}{2}=(-1)^K\frac{a}{2\cos\alpha}$

حال اگر β زاویه‌ای باشد که $\cos\beta=\frac{a}{2\cos\alpha}$ نتیجه میشود :

$\frac{x-y}{2}=\beta\pm 180^\circ K+360^\circ$ (۶) از معادلات (۵) و (۶) مقادیر x و y معلوم میشود

مسئلهٔ ۳ - مطلوبست حل و بحث دستگاه :

$$\left|\begin{array}{l} \sin x+\sin y=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x\cos y=a^2 \end{array}\right| \quad \ldots\ldots$$

چون $\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

و $2\cos x\cos y=\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$=1-2\sin^2\frac{x+y}{2}+2\cos^2\frac{x-y}{2}-1=$

$=2\cos^2\frac{x-y}{2}-2\sin^2\frac{x+y}{2}$

لذا دستگاه فوق چنین میشود : $\left|\begin{array}{l} \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \cos^2\frac{x-y}{2}-\sin^2\frac{x+y}{2}=2a^2 \end{array}\right|$

برای سهولت تحریر چون $\frac{\alpha-\gamma}{\beta}$ را به u و $\frac{\alpha+\gamma}{\beta}$ را به v

بنامیم دستگاه فوق بدین صورت درمیآید

$$\begin{vmatrix} uv = \frac{\sqrt{3}}{4} \\ u^2 - v^2 = a^2 \end{vmatrix}$$

یا $\begin{vmatrix} v = \frac{\sqrt{3}}{4u} \\ 16u^4 - 16a^2u^2 - 3 = 0 \end{vmatrix}$ وچون $u^2 > 1$ و $v^2 < 1$ $\left(\frac{\sqrt{3}}{4u^2}\right)^2$

لذا حل و بحث دستگاه فوق بحل و بحث این دستگاه شرطه منجر میشود :

$$\begin{vmatrix} 16u^4 - 16a^2u^2 - 3 = 0 \\ \frac{3}{16} < u^2 < 1 \end{vmatrix}$$

مسئلهٔ ۴ — مجموع یا تفاضل دو قوس و مجموع یا تفاضل جیب یا جیب تمام آن دو قوس معلوم است مطلوبست محاسبهٔ آن دو قوس

مسئلهٔ فوق بهشت دستگاه مشابه ذیل تقسیم میشود که ما فقط برای نمونه یکی از آنها را حل میکنیم

$$\begin{vmatrix} x \pm y = a \\ \sin x \pm \sin y = a \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} x \pm y = a \\ \cos x \pm \cos y = a \end{vmatrix}$$

مطلوبست حل دستگاه $\begin{vmatrix} x+y = a \\ \sin x + \sin y = a \end{vmatrix}$

معادلهٔ دوم این دستگاه را میتوان چنین نوشت $2\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\gamma}{2} = a$

ولذا $a = \frac{\alpha-\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}$ وبنابراین $\cos\frac{\alpha-\gamma}{2} = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}}$

حال اگر فرض کنیم $\frac{a}{2\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}} = \cos\varphi$ باشد حاصل میشود $\cos\varphi = \cos\frac{\alpha-\gamma}{2}$

وازآنجا $\frac{\alpha-\gamma}{2} = 2k\pi \pm \varphi$ که با ملاحظهٔ $\frac{\alpha+\gamma}{2} = \frac{\pi}{2}$ جوابهای

x و y بدست میآید

بحث — برای اینکه مسئله دارای جواب باشد کافی است که φ موجود

بوده یعنی $1 \geq \frac{a}{2\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}}$ باشد وچون نامساوی اخیر را برحسب a حل کنیم

معلوم میشود که شرط جواب محصور بودن a بین $2\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}$ و $-2\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}$

میباشد

مسئلهٔ ۵ — مجموع یا تفاضل دو قوس و حاصلضرب جیب یا جیب تمام آنها معلوم است مطلوبست محاسبهٔ آن دو قوس

مسئلهٔ فوق بچهار دستگاه مشابه ذیل تقسیم میشود

$$\begin{vmatrix} x \pm y = a \\ \cos x \cdot \cos y = a \end{vmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{vmatrix} x \pm y = a \\ \tan x \cdot \tan y = a \end{vmatrix}$$

برای نمونه دستگاه $\begin{cases} x+y=a \\ 4x+4y=a \end{cases}$ را حل میکنیم

رابطهٔ دوم این دستگاه را میتوان چنین نوشت

$$\varphi(x-y)-\varphi(x+y)=2a$$

یا $\varphi(x-y)=2a+\varphi a$ حال اگر φ را قسمی تعیین کنیم که

$2a+\varphi a=\varphi\varphi$ باشد حاصل میشود $\varphi(x-y)=\varphi\varphi$

واز آنجا $x-y=2k\pi\pm\varphi$ که با ملاحظهٔ $x+y=a$ جوابهای x

و y بدست میآید

بحث — برای آنکه مسئله دارای جواب باشد لازمست $-1\leqslant\varphi a\leqslant 1$

و یا $-1\leqslant 2a\leqslant(\varphi a+1)$ واز آنجا $-\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$

مسئلهٔ ۶ — مجموع یا تفاضل دو قوس و نسبت جیب یا جیب تمام آنها معلوم است مطلوبست محاسبهٔ این دو قوس

مسئلهٔ فوق بچهار دستگاه مشابه ذیل تقسیم میشود

$x+y=a$	و	$x+y=a$
$\frac{\varphi x}{\varphi y}=a$		$a=\frac{4x}{4y}$

برای نمونه دستگاه $\begin{cases} x+y=a \\ \frac{4x}{4y}=a \end{cases}$ را حل میکنیم

معادلهٔ دوم دستگاه اخیر را میتوان چنین نوشت $\frac{a-1}{a+1}=\frac{4x-4y}{4x+4y}$

یا $\frac{2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}}{2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}=\frac{a-1}{a+1}$

یا $\left|\tan\frac{x-y}{2}\right|\tan\frac{x+y}{2}=\frac{a-1}{a+1}$

واز آنجا $\left|\tan\frac{x-y}{2}\right|=\left|\frac{a-1}{a+1}\right|\frac{a}{2}$

حال اگر فرض کنیم $\left|\frac{a-1}{a+1}\right|\frac{a}{2}=\tan\varphi$ باشد حاصل میشود $\left|\frac{x-y}{2}\right|=\varphi$

بنابراین $\frac{x-y}{2}=k\pi+\varphi$ که با ملاحظهٔ $\frac{x+y}{2}=\frac{a}{2}$

جوابهای x و y بدست میآید

بحث — چون بازا جمیع مقادیر a و φ زاویه φ موجود است بنابراین مسئله همیشه دارای جواب خواهد بود

مسئلهٔ ۷ — مجموع یا تفاضل دو قوس و مجموع یا تفاضل ظل آنها معلوم است مطلوبست محاسبهٔ آن دو قوس

مسئلهٔ فوق بچهار دستگاه ذیل تقسیم میشود

$x+y=a$	$x+y=a$
$\left\|\tan x\pm\tan y\right\|=a$	$\left\|\tan x\pm\tan y\right\|=a$

PDF.tarikhema.org

برای نمونه دستگاه $\begin{cases} x+y=a \\ |x+\frac{1}{2}y|=a \end{cases}$ را حل میکنیم

طرف اول معادله دوم دستگاه اخیر را میتوان چنین نوشت :

$$|x+\tfrac{1}{2}y| = \frac{\ln x}{\varsigma x} + \frac{\ln y}{\varsigma y} = \frac{\ln(xy)}{\varsigma x\,\varsigma y}$$

و یا

$$|x+\tfrac{1}{2}y| = \frac{2\ln a}{\varsigma(x-y)+\varsigma a}$$

و بنابراین $a = \frac{2\ln a}{\varsigma(x-y)+\varsigma a}$ و از آنجا

$$\varsigma(x-y) = \frac{2\ln a - a\varsigma a}{a}$$

حال اگر فرض کنیم $\varsigma(x-y) = \varsigma\varphi$ باشد حاصل میشود $\frac{2\ln a - a\varsigma a}{a} = \varsigma\varphi$

و از آنجا $x-y = 2k\pi \pm \varphi$ که با ملاحظهٔ $x+y=a$ جوابهای x و y معلوم میشود

بحث — برای اینکه مسئله دارای جواب باشد باید زاویهٔ φ موجود و لذا باید $\frac{(2\ln a - a\varsigma a)^2}{a^2} \le 1$ و یا $a^2\varsigma^2 a - 4a\ln a\,\varsigma a + 4\ln^2 a \le a^2$

نامساوی اخیر نامساوی درجهٔ دومی است برحسب a

از حل این نامساوی معلوم میشود که شرط جواب آنست که a خارج مقادیر

$\frac{\pi}{2} < a < 2\varsigma 2$ واقع شود

مسئله ۸ — مجموع یا تفاضل دو قوس و حاصلضرب ظل آنها معلوم است مطلوب محاسبه اینده قوس

مسئلهٔ فوق بدو دستگاه مشابه ذیل تقسیم میشود $\begin{cases} x \pm y = a \\ |x|\,|y| = b \end{cases}$

برای نمونه دستگاه $\begin{cases} x+y=a \\ |x|\,|y|=b \end{cases}$ را حل میکنیم

طرف اول معادله دوم دستگاه اخیر را میتوان چنین نوشت :

$$|x|\,|y| = \frac{\ln x}{\varsigma x} \times \frac{\ln y}{\varsigma y} = \frac{\varsigma(x-y)-\varsigma(x+y)}{\varsigma(x-y)+\varsigma(x+y)}$$

و یا

$$|x|\,|y| = \frac{\varsigma(x-y)-\varsigma a}{\varsigma(x-y)+\varsigma a}$$

بنابراین معادلهٔ دوم بدینصورت درمیآید $\frac{\varsigma(x-y)-\varsigma a}{\varsigma(x-y)+\varsigma a} = b$

و از آنجا $\varsigma(x-y) = \frac{1+b}{1-b}\varsigma a$ و چون فرض میکنیم

$\varsigma\varphi = \varsigma a \frac{1+b}{1-b}$ باشد حاصل میشود $\varsigma(x-y) = \varsigma\varphi$

و از آنجا $x-y = 2k\pi \pm \varphi$ که با ملاحظهٔ $x+y=a$

مقادیر x و y بدست میآید

بحث - برای اینکه زاویه φ موجود باشد باید $\frac{(a+1)^2}{(1-a)^2} \geq \sin^2\varphi \geq 1$

باشد که نامساوی درجه دومی است برحسب a و آنرا بسهولت میتوان حل نمود

مسئله ۹ - مجموع یا تفاضل دو قوس و نسبت ظل آنها معلوم است مطلوبست محاسبه آنها و قوس

مسئله فوق به دو دستگاه ذیل تقسیم میشود

برای نمونه دستگاه $\begin{cases} x+y=a \\ \frac{\tan x}{\tan y}=a \end{cases}$ را حل میکنیم $\begin{cases} x\pm y=a \\ \frac{\tan x}{\tan y}=a \end{cases}$

معادله دوم دستگاه اخیر را میتوان چنین نوشت : $\frac{\sin x-\sin y}{\sin x+\sin y}=\frac{a-1}{a+1}$

یا $\frac{\tan(x-y)}{\tan(x+y)}=\frac{a-1}{a+1}$ و از آنجا $\tan(x-y)=\frac{a-1}{a+1}\tan a$

و چون فرض کنیم $\tan a=\tan b$ باشد حاصل میشود $\tan(x-y)=\tan b$

و از آنجا یا $x-y=2k\pi+b$ و یا $x-y=2k\pi+\pi-b$

که چون هریک را با معادله $x+y=a$ حل کنیم جوابهای x و y بدست میآید

بحث - شرط اینکه دستگاه فوق دارای جواب باشد آنست که

$\sin^2 a \geq \frac{(a-1)^2}{(a+1)^2}$ نامساوی اخیر نامعادله درجه دومی است بر

حسب a و آنرا بسهولت میتوان حل نمود

تبصره - مسائل ۷ و ۸ و ۹ را میتوان با کمک دستورات

$$\tan\frac{1}{2}(x+y)=\frac{\sin x+\sin y}{\cos x+\cos y} \qquad \tan\frac{1}{2}(x-y)=\frac{\sin x-\sin y}{\cos x+\cos y}$$

حل نمود در صورت دستگاه مفروض بدستگاه دو معادله دو مجهولی برحسب $\frac{1}{2}x$ و $\frac{1}{2}y$ تبدیل میشود

تمرینات

۹۶ - معادله $m\sin^2 x-2(m-2)\sin x+m+2=0$

را حل نموده بازاء $m=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ قوس x را حساب کنید

۹۷ - معادله $\sin a\cos^2 x-2\cos a\cos x+1=0$ را بازاء مقادیر a بین صفر و $\frac{\pi}{2}$ حل و بحث کنید

۹۸ - معادلات شرطیه ذیل را حل و بحث کنید

$$\sqrt{m\cos^2 x+1}=2\cos x-1$$

$\begin{cases} m\sin^2 x+2\sin x-m=0 \\ 0<x<\frac{\pi}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} \cos^2 x-a\cos x-m=0 \\ 0<x<\frac{\pi}{2} \end{cases}$

$$\frac{\frac{1}{2}(x+a)}{\frac{1}{2}(x-a)} = m \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\pi + \cos\pi$$

$a = \sqrt{2}$ ، $a = \sin\pi + \cos\pi = 0$: با توجه به اتحاد مثلثاتی $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ داریم

$$\sin^2\pi + \cos^2\pi + 2\sin\pi\cos\pi = 2$$

$$\sin^2\pi + \cos^2\pi - 2\sin\pi\cos\pi = 0$$

$$(\sin\pi - \cos\pi)^2 = 0 \Rightarrow \sin\pi - \cos\pi = 0$$

$$\sin\pi = \cos\pi \Rightarrow \tan\pi = 1 \Rightarrow \pi = 45^\circ$$

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۱۰۱ - مساوی $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است.

۱۰۲ - مساوی $\frac{1}{2}$ است.

۱۰۳ - مساوی $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است.

۱۰۴ - مساوی ۱ است.

۱۰۵ - مساوی $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است.

۱۰۶ - مساوی $\frac{1}{2}$ است.

۱۰۷ - مساوی $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است.

۱۰۸ - مساوی ۱ است.

۱۰۹ - مساوی $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است.

۱۱۰ - مساوی $\frac{1}{2}$ است.

۱۱۱ - مساوی $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است.

۱۱۲ - مساوی ۱ است.

۱۰۷- مطلوب حل معادلات مثلثی:

$$\sin(\pi - x) = \sin 2x$$

$$\cos(\pi - x) = \cos(\frac{\pi}{2} + x)$$

$$\sqrt{3}\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$$

$$\tan(\pi - x) = \tan 2x$$

(تبدیل مثلثی: $\tan\frac{x}{2} = t$ کسینوس و سینوس را برحسب t بنویسید)

$$\frac{\sin x}{1+\cos x} + \frac{1+\cos x}{\sin x} = m$$

$$\int_{-a}^{a} (x+a)\sqrt{a-x}\,dx$$

$$\int_{0}^{2} x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x + \cos x}$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x + \cos x}$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\,dx$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\,dx$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\,dx$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\,dx$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\,dx$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\,dx$$

تمرین کنید که

$$x - x^0 = \frac{\pi}{2}$$

۱۰۳- معادله $x^2 + 2x + 8 = 0$ مفروض است. مطلوب است تعیین کمیت که معادله‌ی داده شده دارای دو ریشه‌ی مختلف العلامه باشد.

۱۰۴- معادله‌ی $x^2 + 2x + m = 0$ مفروض است. مطلوب است تعیین کمیت m که معادله‌ی داده شده دارای دو ریشه‌ی مختلف العلامه باشد.

۱۰۵- معادله‌ی $x^2 + 2x + m = 0$ مفروض است. مطلوب است تعیین کمیت m که معادله‌ی داده شده دارای دو ریشه‌ی مختلف العلامه باشد.

$$\begin{vmatrix} mx + 2y = m \\ 4x + my = 2m \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} mx + 4y = m \\ 3x + 2y = 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x + y = 1 \\ (m+1)x + 2y = m+3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} mx + 2y = 1 \\ 3x + my = 3m \end{vmatrix}$$

۱۰۶- معادله‌ی $x^2 + 2x + m = 0$ مفروض است. مطلوب است تعیین کمیت m که معادله‌ی داده شده دارای دو ریشه‌ی مختلف العلامه باشد.

PDF: tarikhema.org

۱۱۶- دستگاه‌های زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} 4x = 5y \\ |x - 2y| = 1 \end{cases} \quad \text{هندسی} \quad \begin{cases} y < 2x + 3 \\ y < \frac{3}{2}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x = 2x^2 y \\ 2(x+y) = 2(x-y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5^x = 25^y \\ |x| = |x| \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 5^y = \frac{1}{25} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = \frac{\pi}{2} \\ 4x + 4^y + 4^z = 21 \end{cases}$$ حل دستگاه خواسته شده است.

۱۱۷- دستگاه‌های زیر را حل کنید.

$$(2^a - 1)x^2 - 2^a x + 2^a - 10 = 0$$

بیابید مقادیر a را که به ازای آن‌ها $x_1 \cdot x_2$ ریشه‌های معادله باشند و $x_1^2 + x_2^2 = 3$ باشد.

۱۱۸- الف) معادله $x^2 - 2x + 2^a - 2^{a-1} = 0$ را حل کنید.

ب) مقادیر a را که به ازای آن‌ها معادله دارای دو ریشه مثبت است، بیابید.

پ) مقادیر a را که به ازای آن‌ها معادله دارای دو ریشه قرینه است، بیابید.

(معادلات نمایی و لگاریتمی)

$$\begin{cases} 4^x - 2^{y+1} = 32 \\ \log_2(x-y) + \log_2(x+y) = 4 \end{cases}$$

۱۱۹- نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $2^{x+1} + 2^{x-1} \geq 5$

ب) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) < 3$

پ) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) \geq 3$

ت) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) \leq 3$

ث) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) > 3$

ج) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3$

چ) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) < 3$

ح) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) \leq 3$

خ) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) \geq 3$

د) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) > 3$

ذ) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3$

ر) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) < 3$

ز) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) \leq 3$

ژ) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) \geq 3$

س) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) > 3$

ش) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3$

ص) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) < 3$

ض) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) \leq 3$

ط) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) \geq 3$

ظ) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) > 3$

ع) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3$

غ) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) < 3$

ف) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) \leq 3$

ق) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) \geq 3$

ک) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) > 3$

گ) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3$

ل) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) < 3$

م) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) \leq 3$

ن) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) \geq 3$

و) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) > 3$

ه) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3$

ی) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) < 3$

۱۲۰- نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) \leq 3$

ب) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) \geq 3$

پ) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) > 3$

ت) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3$

ث) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) < 3$

ج) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) \leq 3$

چ) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) \geq 3$

ح) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) > 3$

خ) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3$

د) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) < 3$

ذ) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) \leq 3$

ر) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) \geq 3$

ز) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) > 3$

ژ) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3$

س) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) < 3$

ش) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) \leq 3$

ص) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) \geq 3$

ض) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) > 3$

ط) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3$

ظ) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) < 3$

ع) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) \leq 3$

غ) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) \geq 3$

ف) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) > 3$

ق) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3$

ک) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) < 3$

گ) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) \leq 3$

ل) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) \geq 3$

م) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) > 3$

ن) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3$

و) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) < 3$

ه) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) \leq 3$

ی) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) \geq 3$

۱۲۱- نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) \leq 3$

ب) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) \geq 3$

پ) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) > 3$

ت) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3$

ث) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) < 3$

ج) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) \leq 3$

چ) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) \geq 3$

ح) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) > 3$

خ) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3$

د) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) < 3$

ذ) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) \leq 3$

ر) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) \geq 3$

ز) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) > 3$

ژ) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3$

س) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) < 3$

ش) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) \leq 3$

ص) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) \geq 3$

ض) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) > 3$

ط) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3$

ظ) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) < 3$

ع) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) \leq 3$

غ) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) \geq 3$

ف) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) > 3$

ق) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3$

ک) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) < 3$

گ) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) \leq 3$

ل) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) \geq 3$

م) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) > 3$

ن) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3$

و) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) < 3$

ه) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) \leq 3$

ی) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) \geq 3$

۱۲۲- نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) \leq 3$

ب) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) \geq 3$

پ) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) > 3$

ت) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3$

ث) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) < 3$

ج) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) \leq 3$

چ) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) \geq 3$

ح) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) > 3$

خ) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3$

د) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) < 3$

ذ) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) \leq 3$

ر) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) \geq 3$

ز) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) > 3$

ژ) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3$

س) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) < 3$

ش) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) \leq 3$

ص) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) \geq 3$

ض) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) > 3$

ط) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3$

ظ) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) < 3$

ع) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) \leq 3$

غ) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) \geq 3$

ف) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) > 3$

ق) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3$

ک) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) < 3$

گ) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) \leq 3$

ل) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) \geq 3$

م) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) > 3$

ن) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3$

و) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) < 3$

ه) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) \leq 3$

ی) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) \geq 3$

tarikhema.org
PDF.tarikhema.org

در صورتیکه x و y و z جزو کمیت‌های اصلی باشند.

۱۱۳- مطلوبست حل و بحث دستگاههای ذیل:

$$\begin{cases} x+y=a \\ x+2y=m(x-y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ c_2 c_4 y=m \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x c_2 y=z \\ x=z c_2 y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=\alpha \\ x+2y=m c_2 x \end{cases} \qquad \begin{cases} x=m c_4 y \\ y=m c_2 x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=m \\ x^2+y^2=1-m^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 y=\frac{1}{8} \\ x y^2=\frac{1}{8} c_2 x \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{a} = \frac{xy}{b} = \frac{y^2}{c} = \frac{x^2+y^2}{c}$$

۱۱۴- دستگاه $\begin{cases} x+y=a \\ x^2+2xy=m^2 \end{cases}$ مفروض است اولاً معادله

بر حسب مجهول $\frac{y}{x}$ تشکیل دهید ثانیاً فرض

$x>0$ و $m>0$ مطلوبست بحث دستگاه و فوق

۱۱۵- ثابت کنید که دستگاه

$$\frac{x+y}{1-xy} = 2$$
$$\frac{xy+3y}{(1-x^2)(1-y^2)+3xy} = 9$$

بهیچوجه نمیتوان برای x و y اعدادی پیدا کرد که در هر دو معادله صدق کنند.

۱۱۶- در معادلات دستگاه $\begin{cases} c_x y=\frac{1}{2} \\ x+y=\frac{3}{2} \end{cases}$ بجنس x و y تغییر کند

بازاء چه مقادیر x و y دراعداد حقیقی

معلوم میشود که

۱۱۷- در معادلات دستگاه $\begin{cases} c_x y=c_y x \\ x+y=a \end{cases}$ بجای a چه عددی باید گذارد

تا دستگاه دارای جواب حقیقی باشد.

۱۱۸- ثابت کنید که دستگاه $\begin{cases} c_x y=c_y x \\ x+y=a \end{cases}$ همواره دارای جواب حقیقی است

۱۱۹- مطلوبست حل و بحث دستگاههای ذیل

$$\begin{cases} x+y=a \\ x^2+2xy=b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_x y=0 \\ x+y=a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=a \\ c_x y=c_y x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=a \\ c_x y=c_{2y} x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=a \\ c_{2x} y=c_{2y} x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=a \\ c_{2x} y=c_{3y} x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=a \\ c_{3x} y=c_{2y} x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=a \\ c_{3x} y=c_{3y} x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=a \\ c_{2x} y=c_{4y} x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=a \\ c_{4x} y=c_{2y} x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=a \\ c_{4x} y=c_{4y} x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=a \\ c_{2x} y=c_{6y} x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=a \\ c_{6x} y=c_{2y} x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=a \\ c_{6x} y=c_{6y} x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=a \\ c_{2x} y=c_{8y} x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=a \\ c_{8x} y=c_{2y} x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=a \\ c_{8x} y=c_{8y} x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=a \\ c_{2x} y=c_{10y} x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=a \\ c_{10x} y=c_{2y} x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=a \\ c_{10x} y=c_{10y} x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=a \\ c_{2x} y=c_{12y} x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=a \\ c_{12x} y=c_{2y} x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=a \\ c_{12x} y=c_{12y} x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=a \\ c_{2x} y=c_{14y} x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=a \\ c_{14x} y=c_{2y} x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=a \\ c_{14x} y=c_{14y} x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=a \\ c_{2x} y=c_{16y} x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=a \\ c_{16x} y=c_{2y} x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=a \\ c_{16x} y=c_{16y} x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=a \\ c_{2x} y=c_{18y} x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=a \\ c_{18x} y=c_{2y} x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=a \\ c_{18x} y=c_{18y} x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=a \\ c_{2x} y=c_{20y} x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=a \\ c_{20x} y=c_{2y} x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=a \\ c_{20x} y=c_{20y} x \end{cases}$$

$$\left|\begin{array}{l} 2x+3y=a \\ 3x+2y=b \end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{l} \lambda(3x-\frac{y}{2})=9(y+\frac{x}{3}) \\ 4x=3y \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{l} x+y=a \\ \lambda x+\lambda y-\lambda x y=m \end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{l} x+y+z=\pi \\ \frac{\lambda x}{a}=\frac{\lambda y}{b}=\frac{\lambda z}{c} \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{l} x+y+z=\pi \\ \frac{1}{x}=\frac{1}{y}=\frac{1}{z} \end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{l} 2x+3y=a \\ 3y+3z=b \\ 3z-3x=c \end{array}\right|$$

۱۱۹- نیم‌دایره بقطر $AB=2R$ مفروض است از نقطه A وتر غیرمشخص AC و از نقطه C وتر CD را بموازات قطر رسم میکنیم مطلوبست تعیین زاویه $\widehat{BAC}=x$ بقسمی که $AC=m.CD$ شود پس از حل و بحث مسئله بازاء $m=2$ زاویه x را تا یک ثانیه تقریب حساب کنید

۱۲۰- بر یک ضلع زاویه xoy دو نقطه A و B بفواصل $oA=a$ و $oB=b$ واقع میباشند بر ضلع دیگر این زاویه نقطه غیرمشخص M بفاصله $OM=x$ قرار دارد اولاً x را طوری تعیین کنید که ظل زاویه AMB مساوی m شود ثانیاً بازاء چه مقدار x زاویه AMB ماکزیمم میشود

۱۲۱- بر محیط نیم‌دایره بقطر $AB=2R$ نقطه غیرمشخص C واقع شده است چون

شکل حول قطر دوران کند مطلوبست تعیین زاویه $x=\widehat{COB}$ بقسمی که مجموع سطوح حاصل از دوران شعاع OC و وتر BC مساوی πm^2 شود (بحث)

۱۲۲- در سئله قبل مماس نقطه C مماس‌های نقاط A و B را در نقاط A' و B' قطع میکند اولاً زاویه x را طوری تعیین کنید که حجم شکل حاصل از دوران ذوزنقه AA'B'B حول قطر AB مساوی m برابر کره بقطر AB شود ثانیاً پس از حل و بحث مسئله بازاء $m=\frac{12}{\pi}$ زاویه x را حساب کنید

۱۲۳- بر طرفین قطعه خط $AB=a$ دو عمود اخراج شده است بر این دو عمود نقاط A' و B' را طوری تعیین کنید که عمود AA' نصف عمود BB' بوده و ظل فصل زاویه BAB' بر ABA' مساوی مقدار k شود پس از حل و بحث مسئله بازاء ماکزیمم طول AA' را حساب کنید

۱۲۴- از نقطه غیرمشخص M واقع بر محیط نیم‌دایره بقطر $AB=2R$ مماس MD و رسم شده است فرض میکنیم نقطه D محل تقاطع آن با استداد قطر باشد اولاً زاویه $\widehat{MAB}=x$ را طوری تعیین کنید که $\overline{AM}=m.\overline{AD}$ شود پس از حل و بحث مسئله بازاء $m=1$ زاویه x را حساب کنید ثانیاً بازاء $m=1$ حجم شکل حاصل از دوران مثلث AMD حول قطر را تعیین کنید

۱۲۵- از نقطه M واقع بر محیط نیم‌دایره بقطر $AB=2R$ دو عمود MP و MQ را بترتیب بر قطر و بر مماس MQ فرود آورده‌ایم اگر مستطیل MPNQ بترتیب حول قطر و مماس دوران کند اولاً زاویه $\widehat{MOM}=x$ را طوری تعیین کنید که نسبت بین

دو حجم حاصل مساوی مقدار m شود ثانیاً بازاء چه مقادیری از m مسئله دارای جواب است ثالثاً بازاء $m=\sqrt{2}-1$ زاویه x را حساب کنید

۱۲۶- قطاع AOB بشعاع $OA=OB=R$ و زاویه مرکزی $A\hat{O}B=45°$ مفروض است مستطیل غیر مشخص MCDE را که راس M آن بر وتر قطاع و دو راس C و D آن بر شعاع OA و راس دیگرش بر شعاع OB قرار دارد رسم میکنیم اولاً زاویه $A\hat{O}M=x$ را طوری تعیین کنید که مستطیل تبدیل بمربع شود ثانیاً زاویه x را قسمی تعیین کنید که سطح مستطیل مساوی mR^2 شود (بحث بازاء مقادیر m)

۱۲۷- در قطاع OAB بشعاع R و زاویه مرکزی α مستطیلی بسطح ماکزیمم محاط کنید بقسمی که قاعده اش موازی وتر قطاع باشد و بازاء $\alpha=120°$ ابعاد مستطیل ماکزیمم را برحسب R حساب کنید

۱۲۸- ربع دایره AOB بشعاع واحد مفروض است از نقطه M واقع بر قوس AMB دو عمود MP و MQ را بترتیب بر دو شعاع OA و OB فرود میآوریم بفرض زاویه $M\hat{O}A=x$ اولاً نقطه M را طوری تعیین کنید که نسبت محیط مستطیل OPMQ بسطحش مقدار m شود ثانیاً پس از بحث مسئله بازاء مقادیر مثبت m مطلوب محاسبه زاویه x وقتیکه $m=2\sqrt{2}$ باشد

۱۲۹- در دایره (O,R) از نقطه C وسط قوس غیر مشخص ACB وتر CE بموازات شعاع OA مرور نموده است اگر زاویه $O\hat{A}B=x$ باشد اولاً زاویه x را طوری تعیین کنید که وتر AB وتر CE را بدو قسمت متساوی تقسیم کند

ثانیاً محاسبهٔ زاویه x بمنجر بمحاسبه $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=\sin x$ میشود عبارت اخیر را قابل محاسبهٔ لگاریتمی نمائید

۱۳۰- از نقطه غیر مشخص M واقع بر محیط نیم دایره بقطر $AB=2R$ عمود MH را بر قطر فرود آورده وتر MA را رسم میکنیم چون شکل را حول قطر دوران دهیم مطلوب است محاسبهٔ زاویه $M\hat{A}B=x$ بقسمی که سطح کل مخروط حاصل از دوران مثلث MAH بسطح مثلث MAH مساوی $2\pi m$ شود بازاء مقادیر مختلف m مسئله را بحث نموده بازاء $m=\sqrt{2}$ زاویهٔ x را حساب کنید

۱۳۱- ربع دایرهٔ AOB بشعاع $OA=OB=R$ مفروض است بر نقطهٔ غیر مشخص M واقع بر قوس AB مماس DMC رسم شده است نقطهٔ D محل تقاطع این مماس با امتداد OB و نقطهٔ C محل تقاطعش با مماس نقطهٔ A است

اولاً - مطلوبست محاسبهٔ زاویه $M\hat{O}A=x$ بقسمی که $AC+CD=l$ باشد

ثانیاً - بازاء مقادیر مختلفهٔ l بحث کنید

۱۳۲- دو خط a و a' برطرفین قطعه خط $AA'=4a$ عمود در نقطهٔ B وسط AA' و نقطه C وسط AB دو خط موازی MM' و NN' مرور نموده و با دو خط a و a' تشکیل متوازی الاضلاع NMM'N' را داده است مطلوبست تعیین زاویه $A\hat{B}M=x$ بقسمی که محیط این متوازی الاضلاع بطول معین $2l$ شود بازاء مقادیر مختلفهٔ l بحث کنید

PDF.tarikhema.org

۱۳۳- قطاع AOB بشعاع R و زاویه مرکزی α بین صفر و π مفروض است از نقطهٔ غیر مشخص M واقع بر قوس قطاع دو عمود MP و MQ را بر دو شعاع OA و OB فرود میآوریم اولاً زاویه $MOA = x$ را طوری تعیین کنید که مجموع دو عمود MP و MQ مساوی طول معین a شود ثانیاً پس از حل و بحث مسئله بازاء $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ و $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ زاویه x را حساب کنید

۱۳۴- نیم دایرهٔ بقطر $AB = 2R$ مفروض است بر امتداد و قطر نقطهٔ C بقاصله $Ac = d$ و بر محیط نیم دایره و نقطه غیر مشخص M واقع است بفرض زاویهٔ $MAB = x$ اولاً زاویهٔ x را طوری تعیین کنید که MC واسطهٔ هندسی بین قطعات MA و MB شود ثانیاً مسئله را بحث نموده بازاء ماکزیمم d زاویه x را حساب کنید

۱۳۵- از نقطهٔ A خارج دایره (R و O) بفاصله $OA = 2R$ مماس و قاطعی بر دایره رسم نموده ایم و نقطه E وسط وتر قاطع است اولاً زاویه OAM و $\frac{OAM}{4}$ را حساب کنید ثانیاً زاویه $OAA = x$ را طوری تعیین کنید که سطح مستطیلی بابعاد AE و DE معادل m برابر مربعی بضلع BE شود ثالثاً بفرض $x = 15^\circ$ مقدار m را حساب کنید

۱۳۶- زاویهٔ قائمهٔ xOy مفروض است طرفین قطعه خط $AB = l$ بر ضلعین این زاویه تکیه است بازاء تغییر وضع نقاط A و B اولاً مکان هندسی نقطه M وسط قطعه خط AB را تعیین کنید ثانیاً اگر مثلث OAB حول Oy دوران کند مطلوب است تعیین شکل و وضع مقطع MC که بر وسط OB عمود است ثالثاً زاویهٔ $OAB = x$ را

قسمی تعیین کنید که سطح کل مخروط حاصل از دوران مثلث OAB حول محور Oy معادل برابر سطح دایره بشعاع l شود پس از حل و بحث مسئله بازاء $m = \frac{\pi}{4}$ زاویهٔ x را حساب کنید

۱۳۷- قطاع AOB بزاویه مرکزی α و شعاع R مفروض است بر نقطه غیر مشخص P واقع بر قوس قطاع مماس CD رسم شده است نقاط C و D بترتیب محل تقاطع این مماس با دو شعاع OA و OB میباشد بفرض زاویهٔ $\widehat{AOP} = x$ و $\widehat{BOP} = y$ اولاً مطلوبست تعیین نقطه P بقسمی که سطح مثلث COD مساوی $\frac{ma^2}{2}$ شود ثانیاً بازاء مقادیر مثبته m بحث کنید

۱۳۸- مطلوبست محاسبهٔ اجزاء مثلثی غیر مشخص که از آن زاویهٔ A و ضلع a و شعاع دایرهٔ محاطیهٔ داخلی (r) معلوم است (در حل این مسئله زوایای B و C را مجهول اختیار کنید)

۱۳۹- اگر r_a و r_b و r_c اشعه دوایر محاطیهٔ خارجی مثلث ABC باشند اولاً ثابت کنید که $\frac{1}{r_a} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$ و $\frac{1}{r_b} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_c}$ و $\frac{1}{r_c} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b}$

ثانیاً اگر این سه شعاع بترتیب جمل متوالیه تصاعدی حسابی باشند بفرض معلوم بودن زاویه A سایر زوایا را حساب کنید

۱۴۰- از مبدأ A بر محیط دایرهٔ مثلثاتی در یک جهت قوسهای $AM = x$ و $AN = y$ را جدا نموده وتر MN را وصل میکنیم اولاً طول تصاویر وتر MN را بر محورهای مختصات بر حسب خطوط مثلثاتی x و y معلوم نموده حاصل را قابل محاسبه لگاریتمی نمائید

PDF.tarikhema.org

ثانیاً بفرض معلوم بودن تصاویر MN و سهای x و y را حساب نموده بازاء تعادیر مختلفه تصاویر بحث کنید

فصل هشتم - حل مثلث

۶۹- بطوریکه در هندسه دیده ایم هرگاه در مثلثی از اضلاع و زوایا و سایر اجزاء معلومات کافی در دست باشد میتوان مثلث را بوسیلهٔ ترسیم مشخص نموده و اجزاء مجهولهٔ آنرا بدست آورد این مقصود در مثلثات بوسیلهٔ محاسبه صورت میگیرد بعبارهٔ اخری هرگاه در مثلثی معلومات کافی در دست باشد میتوان اجزاء مجهولهٔ را از روی آنها حساب نمود که آنرا حل مثلث گویند

حال برای انجام مقصود فوق مابین اجزاء مثلث روابطی بدست میآوریم که بوسیلهٔ آنها با رعایت اجزاء معلومه دستگاه معادلاتی تشکیل شود که از حل آن اجزاء مجهوله بدست آید

۷۰- **قضیه** - در هر مثلث مابین اضلاع a و b و c و زوایای A و B و C فقط سه رابطه متمایز میتوانند موجود باشد

اولاً سه رابطه متمایز موجود است زیرا بطوریکه در هندسه دیده ایم مثلث با وجود

معلوم بودن سه جزء از اجزاء اصلیه آن (اضلاع و زوایا) مشروط بر اینکه لااقل یکی از آنها ضلع باشد مشخص شده ولذا اجزاء مجهوله بدست میآید بنابراین قطعاً مابین سه ضلع و سه زاویه هر مثلث باید سه رابطهٔ متمایز موجود باشد که با معلوم بودن سه جزء از اجزاء اصلیه مثلث دستگاه سه معادله سه مجهولی تشکیل گردد تا از حل آن اجزاء مجهوله بدست آید

ثانیاً مابین اجزاء اصلیه مثلث بیش از سه رابطه متمایز نمیتوانند موجود باشد زیرا بفرض وجود مثلاً چهار رابطه متمایز در صورتیکه دو جزء مثلث مثلاً یک ضلع و یک زاویه در دست باشد چهار رابطه فوق تشکیل دستگاه چهار معادله چهار مجهولی را داده و از حل آن اجزاء مجهوله بدست میآید بعبارهٔ اخری مثلث با وجود معلوم بودن یک ضلع و یک زاویه مشخص میگردد و حال آنکه عدم امکان این موضوع بوجه هندسی محقق است

تبصره - باید دانست که هریک از روابط موجوده مابین اجزاء اصلیه نمیتوانند شامل دو یا سه زاویه و یک ضلع باشد زیرا در اینصورت با معلوم بودن دو یا سه زاویه یک ضلع مثلث معلوم و لذا مثلث مشخص میگردد

مثلثات قائم الزاویه

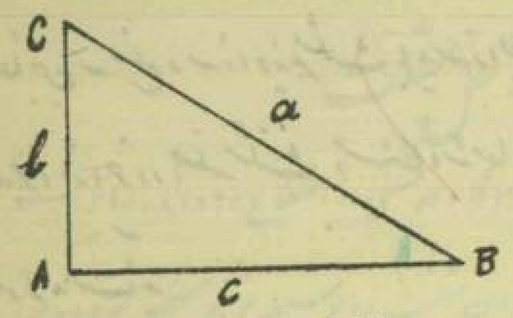
۱- روابط مابین اجزاء آن

۷۱- در مثلث قائم الزاویه ABC راس زاویه قائمه را A قرار داده

وطول اضلاع را بحروف a و

b و c مقابل بر رئوس متناظره

A و B و C مینمائیم



قضیه ـ اولاً بفرض $A = \frac{\pi}{2}$ نتیجه میشود: $B + C = \frac{\pi}{2}$ (۱)

(مجموع زوایای هر مثلث دو قائمه است) و $a^2 = b^2 + c^2$ (۲)

(قضیه فیثاغورث)

ثانیاً ضلع مجاور بزاویه قائمه مساویست با حاصلضرب وتر در جیب تمام زاویه حاده

مجاور آن و یا در جیب زاویه حاده مقابل آن یعنی $b = a \cos C$ (۳)

و یا $b = a \sin B$ (۴) و $c = a \cos B$ (۵) و یا

$c = a \sin C$ (۶)

ثالثاً هر ضلع مجاور بزاویه قائمه مساوی است با حاصلضرب ضلع دیگر در ظل زاویه

مقابل و یا در ظل تمام زاویه حاده مجاور آن یعنی $B = c \tan B$ (۷) و یا

$b = c \cot C$ (۸) و $c = b \tan C$ (۹) و یا

$c = b \cot B$ (۱۰)

اثبات ـ چون رئوس B یا C را مرکز قرار داده بشعاع واحد دائره

رسم کنیم و خطوط مثلثاتی زوایای B و C را مشخص نمائیم از تشابه مثلثات روابط

اخیر بدست میآید

از قضیه فوق معلوم میشود که بین اجزاء مثلث ده رابطه موجود است ولی بطوریکه

در نمره (۷۵) تحقیق نموده ایم هر سه رابطه متمایزی را میتوان روابط

اصلیه قرار داده روابط دیگر را از آن استخراج نمود مثلاً از دستگاه متمایز

$$\begin{cases} B + C = \frac{\pi}{2} \\ b = a \sin B \\ c = a \cos B \end{cases}$$

چون دو رابطه اخیر را مجذور نموده با یکدیگر جمع

کنیم رابطه (۲) بدست میآید و همچنین از تقسیم

روابط اخیر دستگاه رابطه (۷) نتیجه میشود

۲- حل مثلثات قائم الزاویه

حالا تیرا که معلومات از اجزاء اصلیه مثلث باشد حالات کلاسیک و حالا تیرا

که معلومات از اجزاء اصلیه و اجزاء فرعیه (از قبیل ارتفاع میانه منصف الزاویه وغیره) و یا روابطی مابین آنها باشد بحالت غیر کلاسیک موسوم میباشند اینک مثلث قائم الزاویه را در هریک از دو صورت فوق حل میکنیم

حل مثلث قائم الزاویه در حالات کلاسیک

حالت اول - معلومات $\hat{B}$ و a مطلوبست محاسبه $\hat{C}$ و b و c

از حل دستگاه	$B+C=\frac{\pi}{2}$ $b=a\sin B$ $c=a\cos B$	اجزاء مجهول بدست میآید

بحث - چون زاویه $\hat{C}$ باید مثبت و کوچکتر از ۹۰ درجه باشد لذا از رابطه $C=\frac{\pi}{2}-B$ معلوم میشود که $0<B-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}$ و از آنجا $0<B<\frac{\pi}{2}$

بعلاوه از روابط $b=a\sin B$ و $c=a\cos B$ با رعایت مثبت بودن طرف ثانی آنها طولهای b و c مثبت و بنابراین میتوانند اضلاع مثلث باشند از اینقرار با فرض $0<B<\frac{\pi}{2}$ مسئله همواره دارای یک جواب خواهد بود

حالت دوم - معلومات $\hat{B}$ و b مطلوبست محاسبه $\hat{C}$ و a و c

از حل دستگاه	$B+C=\frac{\pi}{2}$ $c=b\cot B$ $b=a\sin B$	اجزاء مجهول معلوم میشود $C=\frac{\pi}{2}-B$

و $a=\frac{b}{\sin B}$

بحث - بطریق مشابه با حالت اول معلوم میشود که بفرض $0<B<\frac{\pi}{2}$ مسئله همواره دارای یکجواب است

حالت سوم - معلومات a و b مجهولات $\hat{B}$ و $\hat{C}$ و c

طریقه ۱ - از رابطه $b=a\sin B$ حاصل میشود $\sin B=\frac{b}{a}$ که از روی آن زاویه B بدست میآید و از روابط $B+C=\frac{\pi}{2}$ و $c=a\cos B$ بترتیب زاویه $\hat{C}$ و ضلع c معلوم میشود

بحث - چون $0<B<\frac{\pi}{2}$ لذا $0<\sin B<1$ و یا $0<\frac{b}{a}<1$ و از آنجا $0<b<a$ که با این فرض زاویه $\hat{C}$ نیز مابین صفر و $\frac{\pi}{2}$ واقع و ضلع c نیز مثبت بوده و بنابراین مسئله همواره دارای یکجواب است

طریقه ۲ - از رابطه $b=a\cos C$ معلوم میشود که $\cos C=\frac{b}{a}$ و چون $1+\cot^2 C=\frac{1}{\cos^2 C}$ پس $1+\frac{b^2}{c^2}=\frac{a^2}{b^2}$ و یا $\cot C=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}$

PDF.tarikhema.org

از تساوی اخیر زاویه C و از رابطه $B+C=\frac{\pi}{2}$ زاویه B بدست میآید و از رابطه فیثاغورث نتیجه میشود $c=\sqrt{(a-b)(a+b)}$

بحث - شرط امکان مسئله آنست که $(a-b)(a+b)>0$ و از آنجا $a>b>0$

تبصره - مورد استعمال طریقه (۱) وقتی است که لگاریتم a و b در دست باشد ولی طریقه (۲) وقتی متعمل است که مقادیر a و b معلوم باشند بعلاوه باید دانست که محاسبه بطریقه ثانی دقیقتر خواهد بود زیرا چنانکه میدانیم محاسبهٔ زوایا بوسیلهٔ ظل زاویه دقیقتر از محاسبهٔ آنها بوسیلهٔ جیب میباشد (۴۳)

حالت چهارم - معلومات b و c مجهولات $\hat{B}$ و $\hat{C}$ و a

از رابطه $\operatorname{tg}B=\frac{b}{c}$ نتیجه میشود $\operatorname{tg}B=\frac{b}{c}$ پس از محاسبه B از رابطهٔ $C=90-B$ زاویه C و از رابطه $b=a\sin B$ و نیز بدست میآید

بحث - چون زاویه B بین صفر و $\frac{\pi}{2}$ است لذا شرط امکان مسئله مثبت بودن اضلاع b و c است که همواره این شرط محقق میباشد

تبصره - در کلیه حالات فوق میتوان مساحت مثلث را از رابطهٔ $S=\frac{1}{2}bc$ که همیشه قابل محاسبهٔ لگاریتمی است تعیین نمود

اینک برای نمونه یکی از حالات کلاسیک را با معلومات عددی حل میکنیم

حالت سوم

معلومات $\begin{cases} a=3740,957 \\ b=2054,670 \end{cases}$ مجهولات $\begin{cases} B=32^\circ\ 18'\ 52'' \\ C=56\ 41\ 7 \\ c=3126,193 \end{cases}$

$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$ $B=90-C$ $c=\sqrt{(a-b)(a+b)}$

محاسبات اصلیه

اول محاسبه C

$\log(a-b)=3,225693$
$\operatorname{colog}(a+b)=\bar{4},225819$
$2\log\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\bar{1},451512$
$\log\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\bar{1},725756$
$\frac{C}{2}=28^\circ\ 20'\ 33''$
$C=56^\circ\ 41'\ 7''$

دوم محاسبه C

$\log(a-b)=3,225693$
$\log(a+b)=\bar{4},225819$
$2\log C=6,999512$
$\log C=3,499756$
$C=3126,19$

محاسبات فرعیه

$a-b=1685,283$
$a+b=5795,627$

اول محاسبه $\log(a-b)$

$\log(a-b)=3,225693$

دوم محاسبه $\log(a+b)$

$\log(a+b)=3,763110$
$\operatorname{colog}(a+b)=\bar{4},225819$

PDF.tarikhema.org

حل مثلث قائم الزاویه در غیر حالات کلاسیک

۷۲ - **قاعدهٔ کلی** - بطور کلی برای حل مثلث قائم الزاویه در غیر حالات کلاسیک

بین معلومات مسئله و اجزاء اصلیه روابطی بدست میآوریم این روابط بارابط موجود

بین اجزاء اصلیهٔ مثلث تشکیل دستگاه معادلاتی میدهند که از حل آن اجزاء مجهولهٔ مثلث

مشخص میشود برای مثال مسئله ذیل را حل میکنیم

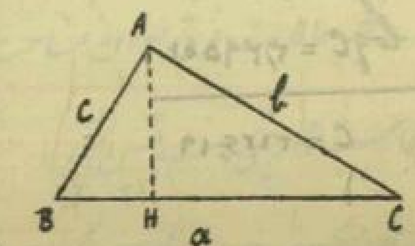
مسئله - در مثلث قائم الزاویه ABC وتر a معلوم و بطول c

است و $BH+AH=l$ (H موقع ارتفاع وارد بر وتر و l طولی است معلوم)

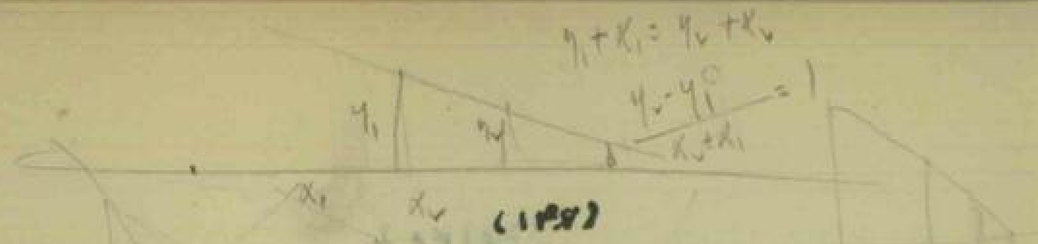
اولا مطلوبست حل و بحث مثلث ثانیا بوجه هندسی مثلث را رسم نموده بحث کنید

اولا - چون $BH=c\cos B$ و $AH=c\sin B$

لذا دستگاه چهار معادله چهار مجهولی ذیل نتیجه میشود



$$\begin{cases} B+C=\frac{\pi}{2} \\ l=a\sin B \\ c=a\cos B \\ c\sin B+c\cos B=l \end{cases}$$



وچون در معادله اخیر دستگاه بجای c مساویش را قرار دهیم معادله بر حسب

خطوط مثلثاتی زاویه B بدست میآید $a\sin B\cos B+a\cos^2 B=l$

و بفرض $\tan\frac{B}{2}=t$ معادله اخیر چنین میشود $lt^2-2at+l-a=0$ (1)

از حل این معادله مقدار زاویه B و از آنجا زاویه C معلوم میشود و از معادلات

اول دستگاه فوق زاویهٔ c و اضلاع b و c بدست میآید

بحث - برای اینکه مسئله دارای جواب باشد باید $0<B<\frac{\pi}{2}$

ولذا باید معادله (1) اولا دارای یک ریشه مثبت باشد

شرط اینکه معادله (1) دارای یک ریشه باشد آنست که $\frac{\Delta'}{4}=0$ یا $2a-l=0$

و از آنجا $l=2a$

و شرط اینکه معادله (1) دارای دو ریشه مثبت و یا مسئله دارای دو جواب قابل

قبول باشد آنستکه نامساویهای ذیل برقرار باشد

$$0<l\le(\sqrt{2}+1)a \qquad 4l^2-4al-a^2\ge 0 \qquad \Delta'>0$$

$$a<l \qquad l-a>0 \qquad \frac{c}{2}>0$$

$$\frac{a}{l}>0 \qquad -\frac{l}{2}<0$$

همیشه برقرار است

از معادله آنها شرط دو جواب چنین میشود $(a+1)(a+2) \leqslant 0$

در حالت خاص اگر $a=-1$ باشد یکی از ریشه‌های معادله (۱) صفر و ریشه دیگر

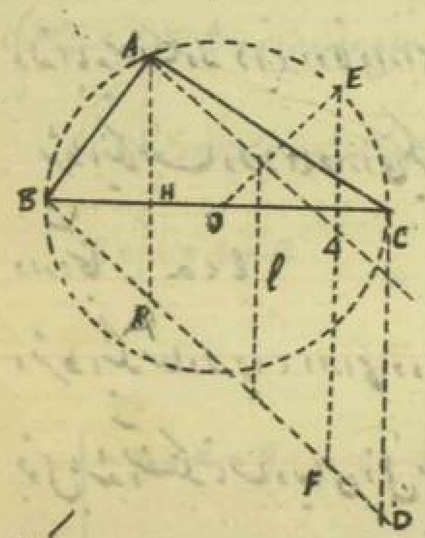
واحد است در اینحالت تنها جواب معادله که در مسئله صدق میکند $a=-1$ میباشد که

بازاء آن مثلث متساوی‌الساقین میشود

ثانیاً حل هندسی - چون در مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع AH را بطول AH متداول

دهیم و از رأس B به نقطه A' انتهای AA' وصل کنیم زاویه CBA' مساوی

A میشود



حال اگر بقطر $BC=a$ دایره

رسم نموده زاویه CBF را مساوی

A درجه بسازیم و از یکی از نقاط

خط BF عمودی بر BC فرود آوریم

و از این عمود بطول l جدا نموده از انتهای آن خط b را موازات BF رسم کنیم

محل تقاطع این خط با دایره رأس A میباشد چنانکه از شکل ملاحظه میشود وقتی

مسئله دارای یک جواب است که خط b محیط نیم دایره BAC را

در یک نقطه قطع کند لذا باید $c \leqslant l < a$ و یا $a \leqslant l$ و اگر

$EF \leqslant l < a$ و یا $(a+1)(a+2) \leqslant 0$ باشد مسئله دارای دو

جواب است

تمرینات

۱۴۱ - ثابت کنید که بین اجزای مثلث قائم‌الزاویه روابط ذیل برقرار است

$$\cos(B-C) = \sin 2B = \frac{2bc}{a^2}$$

$$\cos(2B-C) = \frac{b}{a^2}(3a^2-2b^2)$$

$$\cos 2B = \frac{c^2-b^2}{a^2} \qquad \sin B \operatorname{tg} B = \frac{b^2}{ac}$$

$$\operatorname{tg} 2B = \frac{2bc}{c^2-b^2} \qquad \sin B + \cos 2B = \sin C + \cos C$$

$$\frac{\sin B + \cos C}{\cos B + \sin C} = \operatorname{tg} B$$

$$\cos\acute{e}c\, B + \operatorname{cf} B = \frac{a+c}{b} = \frac{b}{a-c}$$

$$\sec 2B - \operatorname{tg} 2C = \frac{c+b}{c-b}$$

$$\sin^2 B = \cos(A-B)\cos C \qquad \operatorname{cf}\frac{B}{2} = \frac{1+\cos B}{\sin B}$$

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$$

PDF.tarikhema.org

$$\text{ct}\,2\varepsilon = \frac{1}{2}(\text{ct}\,c - \text{ct}\,B)$$

۱۴۲- مطلوبست حل و بحث اجزاء مثلثی قائم‌الزاویه (قائمه در راس A) که معلومات آن بترتیب عبارت باشند :

B, h	B, ε (شعاع دایره محاطه داخلی)
B, r_a	B, s
$B, b+c=l$	$B, b-c=l$
$B, a+c=l$	$B, a-b=l$
$B, a+h=l$	$B, a-h=l$
B, v_c (طول منصف الزاویه C)	
$a, b+c=l$	$a, b-c=l$
$b, a+c=l$	$b, a-c=l$
$a, b^2-c^2=k^2$	a, h
a, r	b, r
$a+2b=l$, $a+c=m$	r_a, h

ضلع b و زاویه‌ای که میانه این ضلع با وتر تشکیل میدهد

۱۴۳- در مثلث قائم‌الزاویه ABC مطلوبست تعیین زاویه B بقسمی که این رابطه بین اضلاع b و c و ارتفاع وارد بر وتر برقرار باشد $\frac{1}{b^2}+\frac{2}{c^2}=\frac{m}{h_a}$

۱۴۴- a - در مثلث قائم‌الزاویه ABC و m^2 سطح دو منصف الزاویه داخلی زوایای

B و C باشد اولاً ثابت کنید که $\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{m^2}{4a^2}$ ثانیاً بفرض معلوم بودن a و m^2 مثلث را حل و بحث نمائید ثالثاً اگر نقطه O محل تقاطع این دو منصف الزاویه باشد ثابت کنید که $BO\times CO=\frac{m^2}{2}$ رابطه اخیر مثلث را بطور بسیط رابطه اخیر مثلث را رسم نمائید

۱۴۵- در مثلث قائم‌الزاویه ABC وتر BC بطول a و زاویه حاده B معلوم است اولاً سایر اجزاء مثلث و همچنین ارتفاع و قطعاتیکه این ارتفاع از وتر جدا میکند حساب کنید ثانیاً بفرض معلوم بودن a زاویه B را بقسمی تعیین کنید که حجم شکل حاصل از دوران مثلث حول وتر معادل حجم کره بشعاع R شود

۱۴۶- در مثلث قائم‌الزاویه ABC وتر بطول a است اگر $c+a=m(b+a)$ (m عددی است مثبت) اولاً اجزاء مثلث را تعیین نموده بازاء مقادیر مختلف m بحث کنید ثانیاً فرض میکنیم باز اء دو مقدار m_1 و m_2 یکی از زوایای حاده مثلث مرتباً مساوی z_1 و z_2 شود ثابت کنید که اگر $m_1\times m_2=1$ باشد زوایای z_1 و z_2 متمم یکدیگرند ثالثاً باز اء $a=15$ و $m=1/12a$ اضلاع و سطح این مثلث را حساب کنید

۱۴۷- مثلث قائم‌الزاویه ABC (قائمه در راس A) مفروض است اگر زاویه حاده بین میانه BM و ضلع AB را با α و زاویه بین همین میانه و وتر را با β بنامیم اولاً ظل زوایای α و β را برحسب ظل زاویه B معلوم نموده هریک از زوایای α و β را بفرض $B=60^\circ$ حساب کنید ثانیاً بفرض معلوم بودن زاویه β زاویه B

PDF.tarikhema.org

B را تعیین نمایید ثالثاً زاویهٔ B را قسمی معلوم کنید که زاویه α دو برابر B شود

۱۴۸ـ مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC بوتر معلوم a مفروض است بقطر ارتفاع AH دایره‌ای رسم میکنیم فرض میکنیم این دایره اضلاع AB و AC را در نقاط M و N قطع کند اولاً ثابت کنید که چهار نقطهٔ M و N و B و C بر محیط یک دایره واقعند ثانیاً برحسب ضلع a و زاویه B مساحت چهارضلعی $BCNM$ را تعیین کنید ثالثاً زاویه B را قسمی معلوم کنید که نسبت سطح این چهارضلعی بسطح دایره AH مساوی مقدار مثبت K شود

۱۴۹ـ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC منصف الزاویه داخلی زاویه B بطول l است مطلوبست تعیین زاویه B بقسمی که اولاً ضلع c و l معلوم باشند ثانیاً c و l معلوم باشند ثالثاً در هریک از حالات بازاء مقادیر مختلف l بحث نموده رابطهٔ بین c و l قسمی تعیین کنید که مثلث مفروض متساوی‌الساقین شود

۱۵۰ـ در نیم‌دایره بقطر $AB=2R$ وتر AD که با قطر زاویهٔ 2α را تشکیل داده رسم شده است چون از نقاط B و D بنقطهٔ C وسط قوس BD وصل کنیم اولاً برحسب R و α اضلاع و اقطار چهارضلعی $ABCD$ را حساب نموده از آنجا رابطهٔ بطلمیوس را بدست آورید ثانیاً α را طوری تعیین کنید که محیط این چهارضلعی مساوی $4Rm$ شود (بحث)

۱۵۱ـ مثلث متساوی‌الاضلاع ABC بضلع a مفروض است بر رأس A خط zz' واقع در داخل زاویه BAC (نقطهٔ C_1 در امتداد خط AC و طرف دیگر رأس A است)

رسم نموده بفرض اینکه تصاویر روی B و C بر این محور نقاط B' و C' باشد اولاً زاویه $BAL=\alpha$ را قسمی تعیین کنید که سطح چهارضلعی $BB'C'C$ مساوی K^2 شود بازاء مقادیر مختلف K^2 بحث کنید ثانیاً صحت رابطه $BB'^2+CC'^2=a^2\left[\frac{1}{2}+(x+30^\circ)^2\sin^2\right]$ را تحقیق نموده زاویه α را قسمی تعیین کنید که این عبارت ماکزیمم شود

۱۵۲ـ در مثلث قائم‌الزاویه ABC ضلع AB کوچکتر از AC میباشد و نقطه D محل تقاطع منصف الزاویه داخلی زاویه A با وتر BC میباشد اگر از نقطه D عمودی بر وتر BC اخراج کنیم و فرض کنیم ضلع AC را که نقطه E قطع کند اولاً مطلوبست محاسبه اضلاع مثلث CDE برحسب اضلاع مثلث ABC و ثابت کنید که $BD=DE$ ثانیاً ثابت کنید که $\frac{CE}{CA}=\frac{1+\frac{1}{2}c}{1+\frac{1}{2}c}$ بعلاوه تغییرات این نسبت را برحسب متغیر c معلوم نمود ثابت کنید که می‌نیمم آن بازاء $c=\frac{\pi}{8}$ است

مثلثات غیر مشخص

۱ـ روابط بین اجزاء اصلیه مثلث

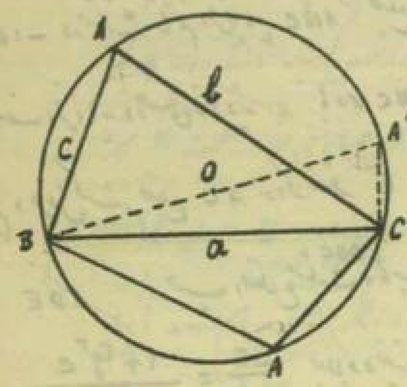
۷۲ـ دستگاه اول ـ قضیه ۱ـ در هر مثلث بین زوایای A و B و C و اضلاع متناظرهٔ a و b و c روابط ذیل برقرار است

$$I\begin{cases}A+B+C=180^\circ\\ \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\end{cases}$$

PDF.tarikhema.org

رابطهٔ اول در هندسه ثابت شده است

برای تحقیق روابط دوم و سوم دایره محیطیه مثلث ABC را رسم نموده قطر BA' را وصل میکنیم چون شعاع دایره محیطیه را R فرض کنیم از مثلث قائم الزاویه A'BC حاصل میشود $\frac{a}{\sin A'} = 2R$



وچون A' مساوی یا مکمل A است

بنابراین $\frac{a}{\sin A} = 2R$ بهمین طریق معلوم میشود که $\frac{b}{\sin B} = 2R$

و $\frac{c}{\sin C} = 2R$ ولذا از مقایسه آنها نتیجه میشود $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

تبصرهٔ ۱- از قضیه فوق معلوم میشود که در مثلث نسبت هر ضلع بجیب زاویهٔ مقابل مساوی قطر دایره محیطیه مثلث است

تبصرهٔ ۲- باید دانست که روابط دستگاه I از یکدیگر تمایز نمیباشند چه مثلاً رابطه $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ نمیتواند نتیجه ترکیب رابطه $A + B + C = 180^\circ$ و $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ باشد زیرا در دو رابطه اخیر ضلع a وجود ندارد و قس علیهذا

عکس قضیهٔ ۱- هرگاه بین طولهای مثبت a و b و c و زوایای مثبت

A و B و C که هریک کوچکتر از ۱۸۰ درجه اند روابط دستگاه I برقرار باشد فقط یک مثلث میتوان یافت که اضلاعش a و b و c و زوایایش A و B و C باشد زیرا اگر با معلومات a و $\hat{B}$ و $\hat{C}$ مثلثی رسم نموده فرض کنیم که زاویه سوم آن A' و دو ضلع دیگرش b' و c' باشد بر وفق قضیه قبل حاصل میشود

$$A' + B + C = 180^\circ$$

$$\frac{a}{\sin A'} = \frac{b'}{\sin B} = \frac{c'}{\sin C}$$

که با مقایسه با روابط دستگاه I نتیجه میشود $A' = A$, $b' = b$, $c' = c$

تبصره- هرگاه بین جیب زوایای مثلثی رابطهٔ متجانسه برقرار باشد (یعنی کلیه جمل رابطه مفروض نسبت بجیب از یکدرجه باشند) چون بجای $\sin A$ و $\sin B$ و $\sin C$ بترتیب مساویشان $\frac{a}{2R}$ و $\frac{b}{2R}$ و $\frac{c}{2R}$ را گذاریم رابطه متجانسی نسبت باضلاع مثلث نتیجه میشود پس همواره میتوان در رابطه متجانسهٔ بین جیب زوایای مثلث جیب را باضلاع متناظره تبدیل نمود و بالعکس چنانکه اگر در مثلثی $2b = a + c$ باشد نتیجه میشود $2\sin B = \sin A + \sin C$

۷۳- دستگاه دوم- قضیه ۲- در هر مثلث بین اضلاع و زوایای آن روابط

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2AH\cdot BC$$

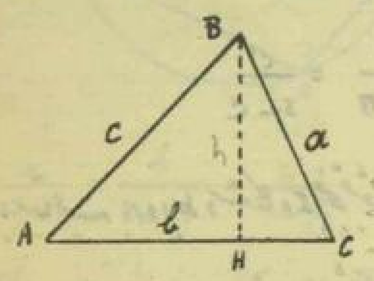
$$b^2 = AH^2 + BC^2 - 2AH\cdot BC$$

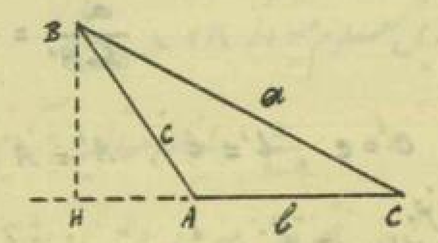
(۱۵۴)

ذیل برقرار است

$$\text{I}\!\text{I}\!\text{I}\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{cases}$$

چون ارتفاع وارد از رأس B را رسم میکنیم اولاً برحسب اینکه زاویه A حادّه باشد





موافق یکی از قضای هندسه نتیجه میشود: $a^2 = b^2 + c^2 - 2a\times AH$

و چون $AH = c\cdot\cos A$ لذا $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

ثانیاً بفرض اینکه زاویهٔ A منفرجه باشد میتوان چنین نوشت:

$a^2 = b^2 + c^2 + 2a\cdot AH$ و چون $AH = c\cdot\cos(180^\circ - A) = -c\cos A$

لذا $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

بهمین طریق میتوان روابط دیگر را اثبات نمود

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2AH\cdot BC$$

$$b^2 = AH^2 + BC^2 - 2AH\cdot BC$$

(۱۵۴)

عکس قضیه ۲ - اگر بین طولهای مثبت a و b و c و زوایای مثبت A و B و C که هریک کوچکتر از ۱۸۰ درجه اند روابط دستگاه $\text{I}\!\text{I}$ برقرار باشد همواره یک مثلث با اضلاع a و b و c و زوایای متناظره A و B و C موجود است

چون مثلث $A'B'C'$ را با معلومات $A'C' = b$ و $A'B' = c$ و زاویه بینهای A رسم کنیم و فرض کنیم که ضلع سوّمش a' و دو زاویه دیگرش B' و C' باشد موافق قضیه ۲ دستگاه ذیل نتیجه میشود

$$\begin{cases} a'^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 = a'^2 + c^2 - 2a'c\cos B' \\ c^2 = a'^2 + b^2 - 2a'b\cos C' \end{cases}$$

از مقایسهٔ این روابط دستگاه $\text{I}\!\text{I}$ بسهولت معلوم میشود که $a = a'$ و $B = B'$ و $c = c'$

دستگاه $\text{I}\!\text{I}\!\text{I}$ قضیه ۳ - در هر مثلث بین اضلاع و زوایای آن روابط ذیل برقرار است

$$\text{I}\!\text{I}\!\text{I}\begin{cases} a = b\cos C + c\cos B \\ b = a\cos C + c\cos A \\ c = a\cos B + b\cos A \end{cases}$$

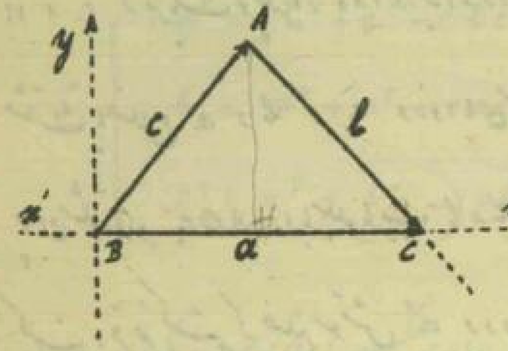
در روی اضلاع مثلث ABC جهت BAC را جهت مثبت اختیار میکنیم در اینصورت

حامل BC را بستوان مجموع

هندسی دو حامل BA و AC

فرض نموده رابطه ذیل را نوشت

$$(BC) = (BA) + (AC)$$



که بنابر قضیه تصاویر حاصل میشود :

$$\text{تا}(BC) = \text{تا}(BA) + \text{تا}(AC)$$

حال چون منکسر BAC را بر محور Bx منطبق بر BC قائما تصویر کنیم حاصل میشود

$$BC \cdot C(BC, Bx) = BA \cdot C(BA, Bx) + AC \cdot C(AC, Bx)$$

یا $\quad a = b\,C\,C + c\,C\,B$

و بهمین وجه روابط دیگر دستگاه فوق معلوم میشود

تبصره - اگر منکسر BAC را بر محوری عمود بر BC تصویر کنیم معلوم میشود که

$$c \sin B - b \sin C = 0 \qquad \text{یا} \qquad \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

پس بوسیله این طریقه نیز ممکن است که روابط اخیر دستگاه I را بدست آورد

عکس قضیه ۳ - عکس این قضیه نیز مانند عکس قضایای ۱ و ۲ اثبات میشود

تعادل دستگاهها

بسهولت معلوم میشود که هریک از دستگاههای I و II و III شامل روابطی متمایز

و مستقل از یکدیگر میباشند ولی این سه دستگاه با یکدیگر متعادلند یعنی میتوان از هر

دستگاه روابط دو دستگاه دیگر را بدست آورد

فرض میکنیم مابین زوایای مثلث A و B و C که هریک کوچکتر از ۱۸۰ درجه اند

و طولهای مثلث a و b و c روابط یکی از دستگاهها مثلا دستگاه I برقرار باشد

بنابر عکس قضیه ۳ لازم میآید که فقط یک مثلث بزوایای A و B و C و اضلاع

a و b و c بتوان طرح نمود و در این مثلث بنابر قضیه ۲ و ۳ روابط دستگاه

I و II برقرار خواهد بود بطریقیکه بفرض وجود روابط دستگاه I مابین معروضات

فوق روابط دستگاه II و III را میتوان نتیجه گرفت

بوجه دیگر نیز ممکن است تعادل این دستگاهها را اثبات نمود

اتحاد دستگاههای I و II - اولا استخراج روابط دستگاه II از دستگاه I -

مثلا میخواهیم از روابط دستگاه I رابطه $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,C A$ را

استخراج کنیم چون از زوایا فقط زاویه A موجود است لذا باید در روابط دستگاه

زوایای B و C را حذف نمود در اینصورت بر تبا حاصل میشود :

$$A = 180^\circ - (B+C)$$

$$\sin A = \sin(B+C) = \sin B\cos C + \sin C\cos B$$

$$\sin^2 A = \sin^2 B\cos^2 C + \sin^2 C\cos^2 B + 2\sin B\cos C\sin C\cos B$$

$$= \sin^2 B(1-\cos^2 C) + \cos^2 C(1-\cos^2 B) + 2\cos B\cos C\sin B\sin C$$

$$= \sin^2 B + \sin^2 C + 2\sin B\sin C(\cos B\cos C - \sin B\sin C)$$

اما $\cos B\cos C - \sin B\sin C = \cos(B+C) = -\cos A$

پس $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B\sin C\cos A$

تساوی اخیر را بطه ایست متجانس نسبت بجیب زوایا لذا حاصل میشود

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

بطریقی مشابه با فوق میتوان سایر روابط دستگاه II را بدست آورد

ثانیاً استخراج روابط دستگاه III از دستگاه II - برای تعیین رابطه $\frac{\sin C}{\sin A} = \frac{c}{a}$

چون در دو رابطه $\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \end{cases}$ ضلع c را حذف کنیم رابطه

ذیل نتیجه میشود $a^2 - b^2 = (a\cos B + b\cos A)(a\cos B - b\cos A)$

و یا $a^2 - b^2 = a^2\cos^2 B - b^2\cos^2 A$

$= a^2(1-\sin^2 B) - b^2(1-\sin^2 A)$

پس از اختصارات لازمه نتیجه میشود $a^2\sin^2 B = b^2\sin^2 A$

چون a و b و $\sin A$ و $\sin B$ مقادیر مثبت اند لذا حاصل میشود $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

بهمین طریق معلوم میشود که $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$

برای تعیین رابطهٔ $A+B+C = 180^\circ$ بمناسبت تجانسی که حل رابطهٔ

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ برحسب اضلاع دارند نتیجه میشود :

$\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B\sin C\cos A$ فرض میکنیم که $A > B > C$

باشد چون رابطهٔ اخیر را برحسب $B < A$ مرتب کنیم معادله درجه دومی تشکیل میشود که پس

از حل ریشه های آن چنین اند $\sin B = \sin(A+C)$ و $\sin B = \sin(C-A)$

جواب دوم بارعایت فرض ممنوع میباشد و از جواب اول نتیجه میشود که یا $B = A+C$

و یا $A+B+C = 180^\circ$ اما تساوی $B = A+C$ بمناسبت اینکه $A > B > C$

است ممنوع بوده و لذا نتها جواب مسئله $A+B+C = 180^\circ$ میباشد

تعادل دستگاههای II و III - اولاً استخراج دستگاه III از دستگاه II -

چون دو رابطه اول و دوم دستگاه Ⅱ را با یکدیگر جمع کنیم حاصل میشود :

$$2c^2 = 2c(a\cos B + b\cos A)$$ که پس از تقسیم طرفین بر $2c$ که مخالف صفر است نتیجه میشود

$$c = b\cos A + a\cos B$$

ثانیاً استخراج روابط دستگاه Ⅱ از دستگاه Ⅰ - چون روابط دستگاه Ⅰ را مرتباً در a و b و c ضرب نموده و از رابطهٔ اول مجموع دو رابطهٔ دیگر را تفصان کنیم رابطهٔ اول دستگاه Ⅱ نتیجه میشود و بهمین نحو میتوان روابط دوم و سوم این دستگاه را بدست آورد

تعادل دستگاههای Ⅰ و Ⅱ - اولاً استخراج روابط دستگاه Ⅲ از دستگاه Ⅰ - از معادله اول دستگاه Ⅰ نتیجه میشود $\sin A = \sin(B+C)$ و یا

$\sin A = \sin B\cos C + \cos B\sin C$ این تساوی رابطه ایست متجانس بر حسب جیب زوایای مثلث لذا چنین نتیجه میشود $a = b\cos C + c\cos B$ و بهمین طریق سایر روابط دستگاه Ⅲ بدست میآید

ثانیاً استخراج روابط دستگاه Ⅰ از دستگاه Ⅲ - چون در دو رابطه اول دستگاه Ⅲ $\cos C$ را حذف نمائیم حاصل میشود : $c = a\cos B - b\cos A$ و

و چون در این رابطه بجای c مساویش $a\cos B + b\cos A$ را قرار دهیم پس از اختصارات لازمه نتیجه میشود $a^2\sin^2 B = b^2\sin^2 A$ و چون مقادیر a و b و $\sin A$ و $\sin B$ مثبتند لذا $a\sin B = b\sin A$ و بنا براین $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ و بهمین نحو معلوم میشود که $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$

برای تعیین رابطهٔ اول دستگاه Ⅰ چون روابط دستگاه Ⅲ نسبت باضلاع روابطی متجانسند لذا تساوی های ذیل نتیجه میشود $\sin A = \sin(B+C)$ و

$\sin B = \sin(A+C)$ و $\sin C = \sin(A+B)$ از این روابط معلوم میشود که یا $A+B+C = 180°$ و یا

$$\begin{cases} A = B+C \\ B = A+C \\ C = A+B \end{cases}$$

دستگاه اخیر ممتنع است زیرا نتیجه میشود که $A=0$ و $B=0$ و $C=0$

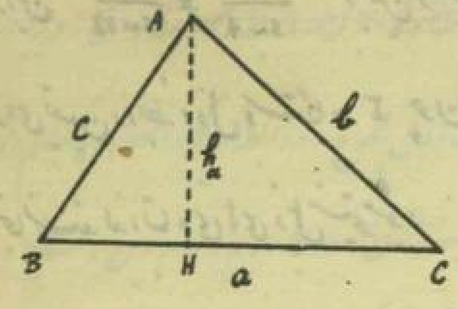
۲- محاسبهٔ اجزاء فرعیه مثلث بحسب اجزاء اصلیه آن

۷۴- چون در بعضی موارد ممکن است بعضی از اجزاء فرعیه مثلث (از قبیل ارتفاع میانه منصف الزاویه و غیره) جزء معلومات مسئله بوده و یا اینکه در ضمن حل مثلث محتاج بمحاسبهٔ بعضی از اجزاء فرعیه آن باشیم لذا لازم است که باین اجزاء فرعیه مثلث و

PDF.tarikhema.org

اجزاء اصلیه آن نیز روابطی بدست آوریم که در این قبیل مواردبرای محاسبه اجزاء بکار بریم

۱- محاسبهٔ ارتفاع h_a - چون در مثلث ABC ارتفاع AH را رسم کنیم



از مثلثات ABH و ACH

نتیجه میشود که $h_a = c\sin B = b\sin C$

وبهمین نحو معلوم میشود که

$h_c = a\sin B = b\sin A$ ، $h_b = a\sin C = c\sin A$

۲- محاسبهٔ مساحت مثلث S - چون در رابطهٔ

$$S = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b\times h_b = \frac{1}{2}c\times h_c$$

بجای ارتفاعات مساویشان را قرار دهیم معلوم میشود که :

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ac\sin B$$

وبا رعایت رابطهٔ $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ میتوان مساحت مثلث را برحسب یکضلع وجیب زوایای دیگر تعیین نمود ... $S = \frac{1}{2}a^2\frac{\sin B\sin C}{\sin(B+C)}$

ونیز از دستور هندسی $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ نیز میتوان مساحت

مثلث را بدست آورد

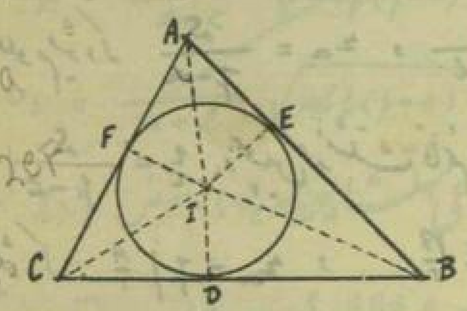
۲- محاسبهٔ شعاع دایرهٔ محیطیه R - چون نسبت هر ضلع مثلث بجیب زاویه مقابل آن مساوی قطر دایره محیطه مثلث است لذا $\frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C}$ $R =$

ونیز میتوان از دستورات هندسی $abc = 4RS$ و $bc = 2Rh_a$

شعاع دایره محیطیه را تعیین نمود $R = \frac{bc}{2h_a}$ و $R = \frac{abc}{4S}$ و

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

۳- محاسبهٔ شعاع دایره محاطیه داخلی r - از رابطهٔ هندسی $S = pr$ معلوم میشود که $r = \frac{S}{p}$ وبهمین از مثلثات



قائم الزاویه AIE و CIF و BID نتیجه میشود

$r = (p-a)\tan\frac{A}{2} = (p-b)\tan\frac{B}{2} = (p-c)\tan\frac{C}{2}$

میتوان r را برحسب اضلاع مثلث حساب نمود از رابطه فوق معلوم میشود که

$\tan\frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}$ و $\tan\frac{B}{2} = \frac{r}{p-b}$ و $\tan\frac{C}{2} = \frac{r}{p-c}$ و

چون $A+B+C = \pi$ لذا بسهولت معلوم میشود که

$$1 = \frac{h_a}{\nu_a}\sin\frac{A}{2} + \frac{h_b}{\nu_b}\sin\frac{B}{2} + \frac{h_c}{\nu_c}\sin\frac{C}{2}$$

$$\frac{1}{\nu_a} = \frac{(2-1)^2}{(2-a)(2-b)(2-c)} \qquad \frac{(2-1)^2}{(2-b)(2-a)} \qquad \frac{(2-1)^2}{(2-c)(2-b)}$$

و از آنجا $\sqrt{\frac{(2-1)(2-a)(2-b)(2-c)}{2}} = r$

از دستور $S = pr$ بار عایت رابطه اخیر معلوم میشود که

$$S = \sqrt{2(2-a)(2-b)(2-c)}$$

۴- محاسبهٔ شعاع دوایر محاطیه خارجی (r_a, r_b, r_c) - از رابطهٔ هندسی

$$(2-a)r_a = (2-b)r_b = (2-c)r_c = S$$

معلوم میشود که $r_a = \frac{S}{2-a}$ ، $r_b = \frac{S}{2-b}$ ، $r_c = \frac{S}{2-c}$

و همچنین از مثلث قائم الزاویه AIE و نظایر آن معلوم میشود که $r = \frac{S}{2-a}$

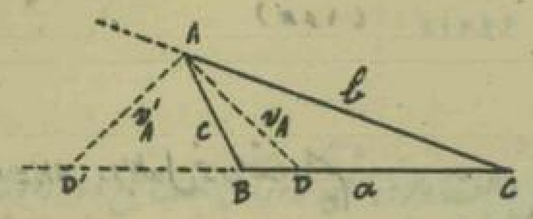
$r_a = p\tan\frac{A}{2}$ ، $r_b = p\tan\frac{B}{2}$ ، $r_c = p\tan\frac{C}{2}$

و $r_a r_b r_c = p^3\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} = r_a r_b r_c$

۵- محاسبهٔ منصف الزوایای داخلی مثلث (ν_A, ν_B, ν_C) -

فرض میکنیم AD = ν_A منصف الزاویه داخلی زاویهٔ A باشد چون

$$S.ABC = S.ABD + S.ADC$$



پس

$$\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}\nu_A c\sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}\nu_A \cdot b\sin\frac{A}{2}$$

و از آنجا $\nu_A = \frac{bc\sin A}{(b+c)\sin\frac{A}{2}} = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$

بهمین نحو معلوم میشود که $\nu_c = \frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}$ ،

$$\nu_B = \frac{2ac\cos\frac{B}{2}}{a+c}$$

و در هندسه ثابت شده است که : $\nu_A = \frac{1}{b+c}\sqrt{bc\,p(p-a)}$

$$\nu_B = \frac{1}{a+c}\sqrt{ac\,p(p-b)}$$

$$\nu_c = \frac{1}{a+b}\sqrt{ab\,p(p-c)}$$

۶- محاسبهٔ منصف الزوایای خارجی مثلث (ν'_A, ν'_B, ν'_C) - بفرض $b > c$ چون

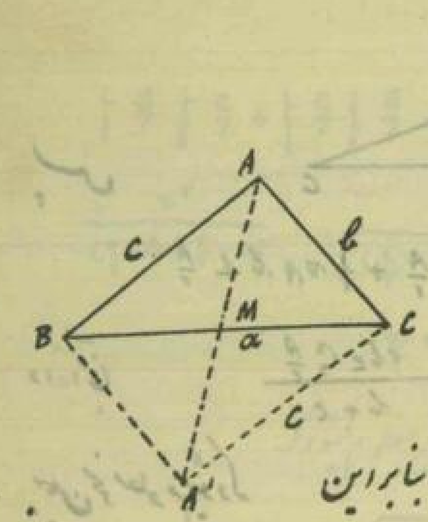
$$S.ABC = S.AD'C - S.AD'B$$

یا $\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}\nu'_A \cdot b\cdot\sin\left(\frac{A}{2} + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\nu'_A c\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right)$

و بنابراین $bc\sin A = \nu'_A \cdot b\cos\frac{A}{2} - \nu'_A c\cos\frac{A}{2}$

$$\nu'_A = \frac{bc\sin A}{(b-c)\cos\frac{A}{2}} = \frac{2bc\sin\frac{A}{2}}{b-c}$$

۷- محاسبهٔ میانه‌های مثلث (m_c, m_b, m_a) - در مثلث ABC



میانه $AM = m_a$ را بطول خود امتداد دهیم

در مثلث $AA'C$ این رابطه نتیجه میشود

$$4m_a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos AC\hat{A}'$$

و یا $4m_a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos A$ و بنابراین

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc\cos A}$$

و بهمین طریق طول سایر میانه‌ها را میتوان حساب نمود

و نیز از دستور هندسی $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2) - a^2}$ و نظایر آن طول میانه‌ها را بر حسب اضلاع مثلث معلوم میشود

۳- حل و بحث حالات کلاسیک مثلث

۷۵- بطور یکه گفتیم دستگاههای I و II و III با یکدیگر معادل میباشند بنابراین هریک از آنها را میتوان در حل اجزاء مثلث بکار برد ولی باید دانست که دستگاه یک بر دو دستگاه دیگر مزیت دارد چه هریک از روابط دستگاه III شامل پنج جزء از اجزاء مثلث است و بعلاوه روابط دستگاههای I و II قبل از تبدیل بیکدیگر قابل محاسبه بوسیله لگاریتم نیستند در صورتیکه روابط دستگاه I اولاً شامل سه یا چهار جزء از اجزاء مثلث بوده و ثانیاً قابل محاسبه بوسیله لگاریتم میباشند

حالت اول - مطلوبست حل و بحث اجزاء مثلثی که از آن یک ضلع و دو زاویه معلوم باشد

فرض میکنیم که ضلع a و دو زاویه طرفین آن یعنی B و C معلوم باشد از دستگاه I مرتباً نتیجه میشود $A = 180^\circ - (B+C)$ و $b = \frac{a\sin B}{\sin A}$ و

$$c = \frac{a\sin C}{\sin A}$$ و از دستور $$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2\sin(B+C)}$$

مساحت مثلث بدست میآید

بحث - شرط امکان مسئله آنست که $0 < A < 180^\circ$ و یا $0 < (B+C) < 180^\circ$

و بنابراین $0 < B+C < 180^\circ$ بازاء این شرط اضلاع b و c مثبت بوده و مسئله همیشه دارای یک جواب است

حالت دوم - مطلوبست حل و بحث اجزاء مثلثی که از آن دو ضلع و زاویه مقابل معلوم است

فرض میکنیم دو ضلع b و c و زاویه مقابلهای (A) معلوم باشد برای تعیین زوایای B و C از دستگاه I دو معادله دو مجهولی

$$\begin{cases} \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{b}{c} \\ B + C = 180^\circ - A \end{cases}$$ نتیجه میشود

چنانکه میدانیم برای حل این دستگاه معادلهٔ اول آنرا میتوان مرتباً چنین نوشت

$$\frac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C} = \frac{b-c}{b+c}$$

$$\frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\tan\frac{B+C}{2}} = \frac{b-c}{b+c}$$

$$\tan\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2} \quad (1)$$

بفرض $b>c$ نتیجه میشود $B>C$ وبنابراین $\frac{B-C}{2}$ مثبت خواهد بود حال اگر زاویهٔ حادهٔ α را طوری تعیین کنیم که $\tan\alpha = \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$ باشد حاصل میشود $\tan\frac{B-C}{2} = \tan\alpha$ و از آنجا $\frac{B-C}{2} = \alpha$ ولذا دستگاه ذیل نتیجه میشود :

$$\begin{cases} \frac{B-C}{2} = \alpha \\ \frac{B+C}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2} \end{cases}$$

جوابهای این دستگاه چنین اند

$B = 90^\circ + \alpha - \frac{A}{2}$ (۳) و $C = 90^\circ - \alpha - \frac{A}{2}$ (۴) وبنابراین

ضلع a از دستور ذیل بدست میآید $a = \frac{(b+c)\sin A}{\sin B}$ (۴)

بحث — چون ظل قوس $\frac{B-C}{2}$ معلوم است لذا بوسیله رابطهٔ (۱) همواره میتوان زاویهٔ حادهٔ α را طوری تعیین نمود برای اینکه زوایای B و C قابل قبول باشند باید هر یک

بین صفر و ۱۸۰ درجه واقع باشند از رابطه (۲) معلوم میشود که زاویه B قابل قبول است وبرای اینکه زاویه C قابل قبول باشد باید $\alpha < \frac{A}{2} - 90^\circ$ وچون طرفین این نامساوی زوایای حاده اند لذا نتیجه میشود $\tan\alpha < \tan\frac{A}{2}$ و یا $\tan\alpha < \frac{b-c}{b+c}\tan\frac{A}{2}$ وبنابراین $\frac{b-c}{b+c} < 1$ و یا $b > c$ وچون این شرط همواره موجود است بنابراین این مسئله همیشه دارای یک جواب خواهد بود

تبصرهٔ ۱ — بطریق دیگر نیز ممکن است ضلع a را تعیین نمود رابطهٔ دوم دستگاه

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b+c}{\sin B + \sin C} = \frac{b+c}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}$$

را میتوان چنین نوشت :

$$a = \frac{(b+c)\sin A}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}} = \frac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}} \quad (۲)$$

و یا

اگر b و c و A در دست باشد دستور اخیر بر دستور (۴) مزیت دارد زیرا برای تعیین زاویه α لگاریتم $b+c$ استخراج شده ولذا برای محاسبه a محاسبه دو لگاریتم جدید کافی است در صورتیکه بوسیله دستور (۴)، سه محاسبهٔ لگاریتمی لازم است

تبصرهٔ ۲ — وقتی که b و c و A معلوم باشند دستور (۱) قابل محاسبه لگاریتمی نیست در اینحال برای تبدیل آن میتوان چنین نوشت

$\frac{B-C}{2}$ چون $\frac{B}{2}$ راسادی $\frac{1-\frac{c}{b}}{1+\frac{c}{b}} = \tan\frac{B-C}{2}$ فرض کرید

دستور (۱) بصورت قابل محاسبه ذیل درمیآید

$$\tan\frac{B-C}{2} = \tan(45^\circ - \frac{A}{2})$$

تبصره ۳ - میتوان مستقیماً ضلع a را بدون محاسبه زاویه B بوسیله دستور

$a = \sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}$ حساب نمود وچنانکه میدانیم (۶۲) برای

محاسبه a باید عبارت $\frac{B-C}{2}$ راسادی $\frac{A}{2}$ فرض نمود در نصورت

ضلع a چنین میشود $a = \frac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}$ ازمقایسه این رابطه باد ستور

قبل معلوم میشود که زاویه $\frac{B-C}{2}$ همان زاویه α است

حالت سوم (حالت مشکوک) - مطلوبست حل و بحث اجزاء مثلثی که از آن

دو ضلع و زاویه مقابل یکی از آنها معلوم باشد

فرض میکنیم اضلاع a و b و زاویه A مقابل بضلع a معلوم باشند ازرابطه

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ معلوم میشود که $\sin B = \frac{b\sin A}{a}$ (۱) ازاین رابطه

زاویه B وازرابطه $C = 180 - (A+B)$ (۲) زاویه C بدست میآید

ضلع c ومساحت مثلث ازروابط ذیل معلوم میشوند : $c = \frac{a\sin C}{\sin A}$ (۳)

$S = \frac{1}{2}ab\sin C$ ،

بحث - وقتی مثلث موجود است که زوایای B و C محصور بین صفرو ۱۸۰

درجه بوده وضلع c مثبت باشد

چون جیب زاویه B معلوم است لذا رابطه (۱) وقتی دارای جواب است که

$a \geq b\sin A$ باشد

اولاً $a = b\sin A$ - دراینصورت روابط (۱) و (۲) و (۳) بصورت ذیل

درمیآیند $\hat{B} = 90^\circ$ و $\hat{C} = 90 - \hat{A}$ و $c = a\cos A$

درینحالت تنها شرط امکان مسئله حاده بودن زاویه A است زیرا بازاء این شرط

زاویه C وضلع c مثبت ولذا قابل قبولند

ثانیاً $a > b\sin A$ - درینحالت زاویه حاده B را قسمی میتوان یافت که

$\sin B = \frac{b\sin A}{a}$ باشد وچون زاویه B بین صفرو ۱۸۰ درجه واقع است لذا

$B_1 = B$ و $B_2 = 180 - B$ برای زاویه B و درنتیجه دو جواب

$C_1 = 180 - (A+B)$ و $C_2 = B - A$ برای زاویه C بدست میآید

برای تحقیق اینکه درینحالت چه وقت مسئله دارای جواب است دو حالت تشخیص میدهیم

$A \leqslant 90^\circ$ – درینصورت زاویه C_1 قابل قبول است و برای اینکه زاویه C_2 نیز قابل قبول باشد باید $B > A$ وچون طرفین این نامساوی زوایای حاده‌اند

لذا نتیجه میشود $\sin B > \sin A$ و یا $\frac{b \sin A}{a} > \sin A$ واز آنجا $a > b \sin A$

پس معلوم میشود که درینحالت وقتی مسئله دارای دو جواب است که $a > b \sin A$ باشد

وبازاء $a \leqslant b \sin A$ یک مثلث جواب مسئله است

$A > 90^\circ$ – درینحالت زاویه C_2 قابل قبول نبود و برای اینکه زاویه C_1 نیز بتواند

زاویهٔ مثلث باشد باید $B < 180^\circ - A$ وچون طرفین این نامساوی زوایای حاده‌اند

لذا $\sin B > \sin A$ که ازآن شرط جواب چنین میشود $a > b \sin A$ بازاء این شرط

مسئله دارای یک جواب قابل قبول است

خلاصه مطالب فوق را میتوان بصورت ساده ذیل نوشت

مسئله جواب ندارد $\quad a < b \sin A$

- یک جواب $\quad A < 90^\circ \quad$ و $\quad a = b \sin A$
- جواب ندارد $\quad A \geqslant 90^\circ \quad$ و $\quad a = b \sin A$
- یک جواب $\quad A \geqslant 90^\circ \quad$ و $\quad a > b$
- جواب ندارد $\quad A \geqslant 90^\circ \quad$ و $\quad a < b$

مسئله یک جواب دارد $\quad A < 90^\circ$ و $a > b$ و $a < b \sin A$

- دو جواب دارد

جدول بحث فوق را بطرز دیگر برحسب مقایسه مقادیر a و b با یکدیگر میتوان

تشکیل داد

مسئله یک جواب دارد $\quad a > b$

- یک جواب $\quad A < 90^\circ \quad$ و $\quad a = b$
- جواب ندارد $\quad A \geqslant 90^\circ \quad$ و $\quad a = b$
- جواب ندارد $\quad a < b \sin A$

$a < b$

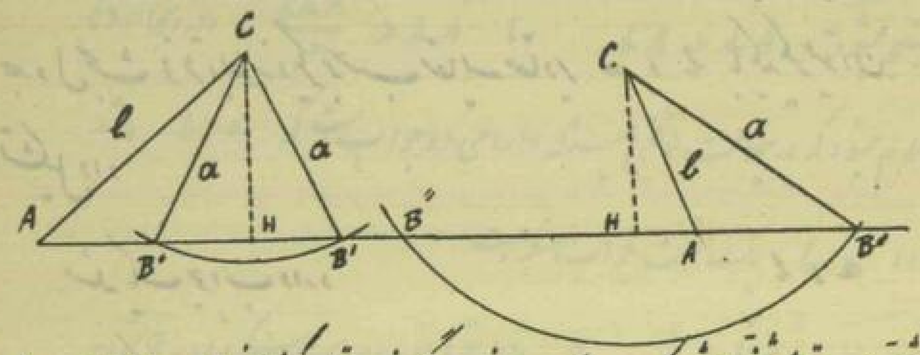
- دو جواب $\quad A < 90^\circ \quad$ و $\quad a < b \sin A$
- جواب ندارد $\quad A \geqslant 90^\circ \quad$ و $\quad a < b \sin A$

ازمطالب فوق معلوم میشود که وقتی مسئله دارای یک جواب است که زاویه معلوم A مقابل بضلع اعظم باشد

تبصره ۱ – بوسیلهٔ رسم هندسی نیز ممکن است مطالب فوق را استنباط نمود

زاویه مساوی A ساخته و بریکی از دو ضلع آن طول AC را مساوی b جدا نموده

و بمرکز c باشعاع a دایره رسم میکنیم فرض میکنیم CH عمود وارد از رأس
برضلع دیگر زاویه A باشد



مثلث وقتی مشخص میشود که دایرهٔ c ضلع دیگر زاویه را قطع کند لذا باید CH<a و یا

$l\sin A < a$ باز از این شرط دایره c ضلع دیگر زاویه A را در دو نقطه

B' و B'' قطع میکند اگر زاویه A را حادهٔ فرض کنیم رأس سوم مثلث مطلوب باشد

و برای اینکه رأس B'' نیز قابل قبول باشد باید $a<l$ اما اگر زاویه A منفرجه باشد

تنها جواب B' وقتی قابل قبول است که $a<l$ باشد

تبصرهٔ ۲ — تقریباً میتوان ضلع c را بدون رجوع بزاویهٔ C از دستور

$a^2 = l^2 + c^2 - 2lc\cos A$ حساب نمود رابطهٔ اخیر معادله درجهٔ دوم است

برحسب مجهول c

$$c^2 - 2lc\cos A + l^2 - a^2 = 0$$

تنها جواب مثبت این معادله قابل قبول است

از بحث این معادله میتوان شرایط امکان مسئله را بدست آورد

معادله فوق وقتی دارای یک جواب قابل قبول است که $\frac{c}{a}<0$ و یا $l<a$ باشد

و وقتی دارای دو جواب قابل قبول است که بر دو ریشهٔ آن مثبت باشند ولذا باید

$\Delta \geq 0$ $\quad l^2\cos^2 A - l^2 + a^2 \geq 0$ یا $a \geq l\sin A$

$\frac{c}{a} > 0$ $\quad l^2 - a^2 > 0$ $\quad$ و $a < l$

$-\frac{l}{a} > 0$ $\quad 2l\cos A > 0$ $\quad$ و $A < 90°$

برای تعیین ضلع c چون معادله فوق را حل کنیم چنین نتیجه میشود

$$c = l\cos A \pm \sqrt{a^2 - l^2\sin^2 A}$$ و یا

$$c = l\left[\cos A \pm \sin A\sqrt{\frac{a^2}{l^2\sin^2 A} - 1}\right]$$

چون $\frac{A}{2}$ را مساوی $45°$ فرض کنیم ضلع c بدینصورت درمیآید

$$c = l\frac{\cos A \pm \sin A}{\sqrt{2}}$$ و یا $$c = l\frac{\sin(45° \pm A)}{\sqrt{2}}$$

از مقایسهٔ این دو رابطه با دو رابطه قبل معلوم میشود که α همان زاویه B است

حالت چهارم — مطلوبست حل و بحث اجزاء مثلثی که از آن سه ضلع معلوم است

بوسیله دستگاه $\frac{a}{2}$ میتوان زوایای مثلث را تعیین نمود زیرا رابطه این دستگاه

معادله ایست یکمجهولی برحسب یکی از زوایا چنانکه از رابطه $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

نتیجه میشود $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ دستور اخیر قابل محاسبه لگاریتمی نیست لذا میتوان

چنین نوشت

$$1 + \cos A = 2\cos^2\frac{A}{2} = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$1 - \cos A = 2\sin^2\frac{A}{2} = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos^2\frac{A}{2} = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{4bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}$$

پس

$$\sin^2\frac{A}{2} = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{4bc} = \frac{(a+b-c)(a+c-b)}{4bc}$$

بفرض $a+b+c = 2p$ روابط فوق چنین میشوند :

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \quad , \quad \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

چون بهمین طریق عمل کنیم دستورات ذیل حاصل میشود :

$$\alpha\begin{cases}\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\\ \cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}\\ \cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}\end{cases} \qquad \beta\begin{cases}\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\\ \sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}\\ \sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}\end{cases}$$

از تقسیم روابط این دو دستگاه بر یکدیگر نتیجه میشود :

$$(\delta)\begin{cases}\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}\\ \tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}\\ \tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}\end{cases}$$

زوایای A و B و C را میتوان از روابط دستگاههای فوق بدست آورد ولی

باید دانست که بدو دلیل محاسبه زوایا بوسیله دستورات (δ) بر دستورات دیگر ترجیح دارد

اولاً در دستورات (δ) محاسبهٔ چهار لگاریتم و در دستورات دیگر محاسبهٔ

۷ لگاریتم لازم است

ثانیاً چنانکه دیدیم محاسبه زاویه بوسیلهٔ لگاریتم ظلش دقیقتر تعیین میشود تا بوسیله لگاریتم

جیب و یا جیب تمام آن

مساحت مثلث را میتوان از دستور $S = \frac{1}{2}bc\sin A = bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$

بدست آورد و لذا $S = bc\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$

و یا $S = \sqrt{(p-b)(p-c)p(p-a)}$

بحث — تنها شرط جواب آنستکه مقادیر زیر رادیکالها مثبت باشند

لذا باید $۲(۲-c)(۲-b)(۲-a) > ۰$

و یا $(۲+c-a)(a+c-b)(a+b-c) > ۰$ چون یکی از

اضلاع مثلاً ضلع a را ضلع اعظم فرض کنیم بسهولت معلوم میشود که دو عامل

$(۲-c+a)$ و $(a+c-b)$ مثبت بوده ولذا تنها شرط امکان

مسئله چنین میشود $۲-a+c > ۰$ و یا $a < b+c$ یعنی باید ضلع اعظم

کوچکتر از مجموع دو ضلع دیگر باشد بازاء این شرط دستورات فوق برای هر زاویه

یک جواب تعیین میکنند ولذا مسئله دارای یک جواب است

تبصره — بین تمام این حالات تنها حالت سوم که محاسبه مجهولات آن بنجر

بمحاسبه زاویه B میشود چندان دقیق نیست زیرا جیب نیز زاویه معلوم است

اینک برای نمونه بحل چند مثلث در یکی از حالات کلاسیک میپردازیم

حالت سوم

معلومات	مجهولات
$a = ۳۱۹۳,۴$	$B' = ۸۳^g,۹۹۵۰$ $B'' = ۱۱۶^g,۰۰۵۰$
$b = ۴۸۰۶,۴$	$C' = ۷۱^g,۵۰۰۴$ $C'' = ۳۹^g,۴۹۰۴$
$A = ۴۴^g,۵۰۴۶$	$c' = ۴۴۷۳,۲$ $c'' = ۲۸۸۴,۵$

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} \qquad C = ۲۰۰^g - (A+B) \qquad c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

محاسبات اصلیه

محاسبه B

$\log b = ۳,۶۸۱۸۲$

$\log \sin A = \bar{۱},۸۰۸۵۶$

$\operatorname{colog} a = \bar{۲},۴۹۵۷۵$

$\log \sin B = \bar{۱},۹۸۶۱۳$

$B' = ۸۳,۹۹۵۰$ $B'' = ۱۱۶,۰۰۵۰$

محاسبه ضلع c'

$\log a = ۳,۵۰۴۲۵$

$\log \sin C' = \bar{۱},۹۵۴۹۴$

$\operatorname{colog} \sin A = ۰,۱۹۱۴۴$

$\log c' = ۳,۶۵۰۶۳$

$c' = ۴۴۷۳,۲$

محاسبه ضلع c''

$\log a = ۳,۵۰۴۲۵$

$\log \sin C'' = \bar{۱},۷۰۴۳۹$

$\operatorname{colog} \sin A = ۰,۱۹۱۴۴$

$\log c'' = ۳,۴۴۰۰۸$

$c'' = ۲۸۸۴,۵$

محاسبات فرعیه

محاسبه $\log b$

$\log ۴۸۰۶,۰ = ۳,۶۸۱۷۸$

$\frac{۴}{۴} = \frac{}{}$

$\log b = ۳,۶۸۱۸۲$

محاسبه $\log \sin A$

$\log \sin ۴۴,۵۰ = \bar{۱},۸۰۸۵۲$

$\frac{۴}{۴۴} = \frac{}{}$

$\log \sin A = \bar{۱},۸۰۸۵۶$

محاسبه $\log a$

$\log ۳۱۹۳,۰ = ۳,۵۰۴۲۰$

$\frac{۴}{۵} = \frac{}{}$

$\log a = ۳,۵۰۴۲۵$

محاسبه $\log \sin C'$

$A = ۴۴,۵۰۴۶$

$B' = ۸۳,۹۹۵۰$

$A+B' = ۱۲۸,۴۹۹۶$ $\log \sin C' = \bar{۱},۹۵۴۹۴$

محاسبه $\log \sin C''$

$A = ۴۴,۵۰۴۶$

$B'' = ۱۱۶,۰۰۵۰$

$A+B'' = ۱۶۰,۵۰۹۶$ $\log \sin C'' = \bar{۱},۷۰۴۳۹$

PDF.tarikhema.org

حل و بحث اجزاء مثلث در غیر حالات کلاسیک

۷۴ - بطور یکه میدانیم حل اجزاء مثلث منجر بحل یکدستگاه معادلات سه یا چهار یا پنج و یا شش مجهولی میشود ولی طریقه حل این قبیل دستگاهها را نمیتوان در تحت قواعد کلی در آورد اما میتوان بموارد ملاحظات ذیل را که سبب سهولت در حل این قبیل مسائل است در نظر گرفت :

اولاً بطور کلی در حل و بحث اجزاء مثلث بهتر آنست که ابتدا حل مثلث از محاسبه زوایا شروع شود زیرا همینکه زوایا معلوم شد اضلاع بسهولت تعیین میشود و بعلاوه بدین وسیله دستور ثانی بدست میآید که بحث در آنها بسیار ساده است

ثانیاً اگر مجموع دو مجهول معلوم باشد سهلتر آنست که تفاضل آنها در حساب نموده تا مجموعشان تشکیل دستگاه دو مجهولی ساده دهد چنانکه اگر در مثلثی زاویه A معلوم باشد چون مجموع زوایای B و C نیز معلوم است لذا برای محاسبه $\hat{B}$ و $\hat{C}$ کافی است که $B-C$ را حساب کنیم

اینک برای نمونه چند مسئله ذیل را حل میکنیم

مسئله ۱ — در مثلثی زاویه A و ضلع مقابل آن a و مجموع دو ضلع دیگر $b+c=m$ داده

معلوم است مطلوبست حل در سه مثلث

اولاً محاسبه زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ - از روابط دستگاه (۱) بترتیب حاصل میشود

$$(1)\quad \begin{cases} B+C = 180 - A \\ \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = \dfrac{b+c}{\sin B + \sin C} \end{cases}$$

بنابراین $\dfrac{a}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}} = \dfrac{b}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}}$ و از آنجا $\dfrac{a}{2\sin\frac{A}{2}} = \dfrac{b}{\cos\frac{B-C}{2}}$

حال اگر فرض کنیم $B+C$ و α کوچکترین زاویه مثبتی باشد بطریقیکه $\cos\alpha = \dfrac{a}{2\sin\frac{A}{2}}$ باشد حاصل میشود :

$\cos\alpha = \cos\frac{B-C}{2}$ و از آنجا $\alpha = \frac{B-C}{2}$ که با

ملاحظه $\frac{B+C}{2} = 90 - \frac{A}{2}$ نتیجه میشود :

$$(2)\quad \begin{cases} B = 90 - \frac{A}{2} + \alpha \\ C = 90 - \frac{A}{2} - \alpha \end{cases}$$

ثانیاً محاسبه اضلاع b و c - از روابط آخر دستگاه (۱) حاصل میشود

$$(۳)\quad \begin{cases} b = \dfrac{a \sin B}{\sin A} \\ c = \dfrac{a \sin C}{\sin A} \end{cases}$$

بحث ـ برای اینکه مثلث موجود باشد باید که اولاً $\sin\alpha$ محصور بین صفر و یک باشد ثانیاً اضلاع b و c مثبت باشند ثالثاً زوایای B و C محصور بین صفر و ۱۸۰ درجه باشند

برای اینکه $\sin\alpha$ محصور بین صفر و یک باشد باید $0 < \frac{a \sin B}{c} < 1$ (۴)

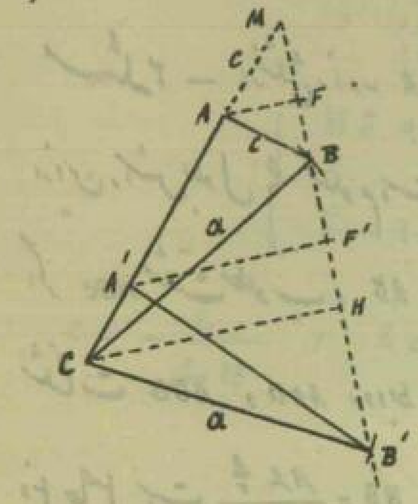
اضلاع b و c مثبت خواهند بود هرگاه زوایای B و C محصور بین صفر و ۱۸۰ درجه باشند و چون برطبق رابطه (۱) این دو زاویه کوچکتر از ۱۸۰ درجه میباشند بنابراین کافی است که مثبت باشند اما زاویه B مثبت است و برای اینکه زاویه C نیز مثبت باشد باید $0 < \alpha < 90 - \frac{A}{2}$ و از آنجا $\frac{A}{2} - 90 < \alpha < 90$ طرفین نامساوی زوایای حاده اند بنابراین حاصل میشود $\sin(\frac{A}{2} - 90) < \sin\alpha < 1$

یا $\frac{a \sin B}{c} < \sin\alpha < 1$ (۵) از مقایسه روابط (۴) و (۵) نتیجه میشود

$\frac{a \sin B}{c} < 1$ و از آنجا شرط امکان مسئله چنین است

$a < b \sin A$

حل هندسی ـ فرض میکنیم مسئله حل شده و مثلث ABC مثلث مفروض باشد



ضلع CA را مساوی AB امتداد میدهیم

در اینصورت مثلث ABM متساوی الساقین

و زاویه M مساوی $\frac{A}{2}$ میباشد حال در مثلث BMC ضلع $BC = a$ و ضلع $MC = b$ و زاویه M مقابل بضلع a

معلوم است اگر رسم میکنیم بدینطریق که زاویه $M = \frac{A}{2}$ را رسم نموده در روی یک ضلع آن طول $MC = b + c = l$ را جدا نموده نقطهٔ C را مرکز قرار میدهیم و بشعاع a قوسی رسم میکنیم تا ضلع دیگر زاویه را در نقاط B و B' قطع کند و بعد عمود منصف MB و MB' را رسم میکنیم تا MC را در نقاط A یا A' قطع نماید در اینصورت مثلث ABC یا $AB'C$ جواب مسئله خواهد بود

بحث ـ شرط امکان مسئله آنست که دایره بمرکز C ضلع دیگر زاویه M را قطع نماید لذا باید $a > l \sin\frac{A}{2}$ یا $a \geq l \sin\frac{A}{2}$

بازاء این شش مسئله همواره دارای یک جواب هست زیرا بسهولت میتوان اثبات نمود که مثلثات ABC و $A'B'C'$ متساویند

مسئلهٔ ۳ — از مثلثی زاویه A و منصف این زاویه بطول l و ارتفاع وارد از این رأس بطول h معلوم است مثلث را حل و بحث کنید

اگر ABC مثلث مطلوب و AD منصف آن از زاویه A و AH ارتفاع باشد از مثلثات ADB و ACD روابط

ذیل حاصل است $BD = \frac{ac}{b+c}$

و چون $CD = \frac{ab}{b+c}$

پس $BD + CD = a$ (۱) $a(b+c) = 2l\cos\frac{A}{2}(b+c)$

از طرف دیگر از مثلث قائم‌الزاویه AHC معلوم میشود که $h = b\sin C$ (۲)

این دو تساوی با روابط دستگاه Σ تشکیل دستگاه پنج معادله پنج مجهولی میدهد برای محاسبه مجهولات این دستگاه از تقسیم روابط (۱) و (۲) با ملاحظه دستگاه نتیجه میشود $\frac{2l\cos\frac{A}{2}(b+c)}{bc} = \frac{h}{b\sin C}$

یا $\frac{B-C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{B+C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi - A}{2} = \frac{A}{2}$ و چون $\cos\frac{B+C}{2} = \sin\frac{A}{2}$

پس $\cos\frac{B-C}{2} = \frac{h}{l}$ (۳) حال اگر زاویه مثبت φ را طوری تعیین کنیم که $\cos\varphi = \frac{h}{l}$ باشد حاصل میشود $\frac{B-C}{2} = \varphi$

که با ملاحظه $\frac{B+C}{2} = 90 - \frac{A}{2}$ نتیجه میشود :

$$\begin{cases} B = 90 - \frac{A}{2} - \varphi \\ C = 90 - \frac{A}{2} + \varphi \end{cases}$$

و از آنجا طول اضلاع چنین میشود $b = \frac{h}{\sin C}$ و $c = \frac{h}{\sin B}$

و $a = \frac{2l\sin A}{\sin B + \sin C} = \frac{2h\sin A}{\sin B\sin C}$

بحث — برای اینکه مسئله ممکن باشد اولاً باید $\cos\frac{B-C}{2} \leq 1$

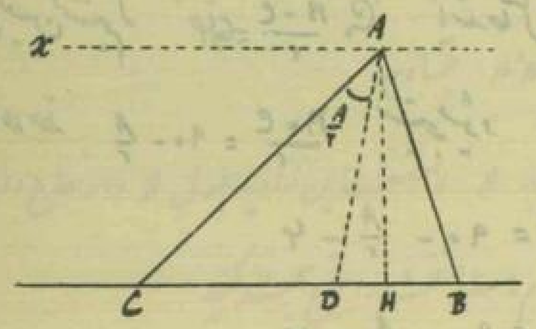
که از آن نتیجه میشود $h \leq l$ (۴) ثانیاً باید زوایای B و C محصور بین صفر و ۱۸۰ درجه باشند زاویه B قابل قبول است برای اینکه زاویه C نیز قابل قبول باشد باید

$\varphi < 90 - \frac{A}{2}$ و چون طرفین نامساوی اخیر زوایای حاده‌اند لذا نتیجه میشود

$\cos\varphi > \sin\frac{A}{2}$ و از آنجا $h > l\sin\frac{A}{2}$ (۵) از مقایسه نامساویهای (۴) و (۵) شرط امکان مسئله چنین میشود

حل و بحث هندسی — چون مثلث قائم‌الزاویه ADH را با معلومات وتر (l)

ویک ضلع h_a رسم کنیم وازطرفین ضلع B ازرأس A دوزاویه مساوی $\frac{A}{2}$



بسازیم محل تقاطع امتداد ضلع دیگر این زاویه با امتداد DH روی دیگر مثلث را مشخص میکند برای اینکه مسئله ممکن باشد باید اولاً $h_a \leq B$ ثانیاً ضلع دیگر زاویه $\frac{A}{2}$ امتداد DH را قطع کند یعنی $\frac{A}{2} < \widehat{xAD}$ باشد (خط Ax موازی DH است) ویا $\frac{A}{2} < \widehat{ADH}$

ویا $\frac{A}{2} < 90^\circ$ وازآنجا $B \geq h_a > B\sin\frac{A}{2}$

مسئله ۳ — در مثلثی ارتفاع h_a وقاعده a وتفاضل زوایای B و C معلوم است $B-C=\alpha$ (α محصور بین صفر و ۱۸۰ درجه میباشد) مطلوب است حل و رسم مثلث

میدانیم که $h_a = \frac{a\sin B\sin C}{\sin A}$ ولذا :

$$h = \frac{a[\cos(B-C) - \cos(B+C)]}{2\sin A} = \frac{a[\cos\alpha - \cos(B+C)]}{2\sin(B+C)}$$

که پس از رفع مخرج حاصل میشود :

$$2h\sin(B+C) + a\cos(B+C) = a\cos\alpha$$

معادله کلاسیک اخیر برحسب $\tan\frac{B+C}{2}$ چنین میشود :

$$a\cos^2\frac{\alpha}{2}\tan^2\frac{B+C}{2} - 2h\tan\frac{B+C}{2} - a\sin^2\frac{\alpha}{2} = 0 \qquad (1)$$

از حل این معادله $\tan\frac{B+C}{2}$ و در نتیجه $\frac{B+C}{2}$ معلوم میشود که با ملاحظه روابط $B-C=\alpha$ و $A+B+C=180$ زوایای A و B و C بدست میآیند

وازآنجا اضلاع مثلث از روابط $c=\frac{a\sin C}{\sin A}$ و $b=\frac{a\sin B}{\sin A}$

معلوم میشوند

بحث — برای اینکه مسئله دارای جواب قابل قبول باشد باید اولاً b و c مثبت و ثانیاً زوایا محصور بین صفر و ۱۸۰ درجه باشند

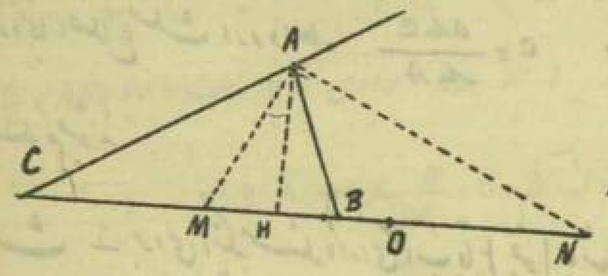
اضلاع b و c مثبت خواهند بود هرگاه زوایای A و B و C بین صفر و ۱۸۰ باشند وشرط اخیر وقتی موجود خواهد بود که $0 < \frac{B-C}{2} < \frac{B+C}{2} < 90^\circ$

ویا $\left|\tan\frac{B+C}{2}\right| > \tan\frac{\alpha}{2}$ باشد بعبارة اخری شرط امکان مسئله آنست که ریشه‌های معادله بزرگتر از $\tan\frac{\alpha}{2}$ باشند

شرط آنکه مسئله فقط دارای یکجواب باشد آنست که $0 < \left(\tan\frac{B+C}{2}\right)h$ ویا

۲۰ $\frac{a}{2h}$ - این تساوی همواره محقق بوده ولذا مسئله همیشه دارای یک جواب است

حل هندسی — فرض میکنیم مسئله حل شده و مثلث ABC مثلث مطلوب باشد. میدانیم که زاویه حادثه بین ارتفاع و منصف الزاویه هر راسش برابر است با نصف تفاضل دو زاویه دیگر بنابراین



مثلث AHM را با معلومات

زاویه A مساوی $\frac{A}{2}$ و زاویه

قائمه H وضلع h_a رسم میکنیم

حال برای یافتن رئوس B و C عمود AN را بر AM اخراج میکنیم

واضح است که AN منصف الزاویه خارجی مثلث مطلوب بوده و بنابراین نقطه N

بر دو نقطه H نسبت به دو راس مطلوب B و C میباشد و چون فرض کنیم

که O وسط HN باشد بنابر آنچه میدانیم $\overline{ON}^2 = \overline{OB}.\overline{OC}$ خواهد بود

و با ملاحظه آنکه $OC - OB = a$ برای یافتن رئوس B و C کافی است که بر

روی خط غیر محدود HN دو نقطه B و C را بطریقی پیدا کنیم که $\overline{ON}^2 = OH.OC$

و $OC - OB = a$ باشد بسهولت معلوم میشود که مسئله همواره دارای یک جواب است

تمرینات

۱۵۳- ثابت کنید که در مثلثات متساوی الساقین این روابط برقرار است

$$S_A = \frac{1}{2} a h_a \qquad S_A = \frac{1}{2} a b \sin\frac{A}{2}$$

$$S_A = \frac{1}{2} a b \sin C$$

$$\sin\frac{B}{2} - \cos\frac{C}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

۱۵۴- مستقیماً روابط $a = \frac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}$ ،

$$\tan\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2} \quad \text{و} \quad a = \frac{(b-c)\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B-C}{2}}$$

را تعیین کنید (بدین طریق: بفرض $b > c$ چون بر ضلع AC از طرفین نقطه A قطعات AD و AE را مساوی c جدا کنیم معلوم میشود که $CE = b + c$ و $CD = b - c$ خواهد بود و چون بین اجزای مثلثات HCD و HCE رابطه $\frac{h_a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ را برقرار نمائیم روابط فوق تعیین میشود)

۱۵۵- اگر $2p$ مساوی محیط و S مساحت و R شعاع دایره محیطیه و r و r_a و r_b و r_c شعاع دوایر محاطیه مثلثی غیر مشخص باشند صحت روابط

PDF.tarikhema.org

ذیل را ثابت کنید:

$$\frac{\cot A}{\sin B \sin C} + \frac{\cot B}{\sin C \sin A} + \frac{\cot C}{\sin A \sin B} = 2$$

$$a\sin(B-C) + b\sin(C-A) + c\sin(A-B) = 0$$

$$a = 4(1 - \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2})$$

$$(b+c)\cos A + (c+a)\cos B + (a+b)\cos C = a+b+c$$

$$(b-c)\cot\frac{A}{2} + (c-a)\cot\frac{B}{2} + (a-b)\cot\frac{C}{2} = 0$$

$$b\sin^2\frac{C}{2} + c\sin^2\frac{B}{2} = \frac{1}{2}a$$

$$b(\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2}) + c(\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{C}{2}) = 4R$$

$$a\cot A + b\cot B + c\cot C = 2(R+r)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{2}{a}\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{4R}{abc}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\frac{2}{r} = \frac{4R}{a}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$4R = 2a + 2b + 2c - 2$$

$$S = 2r^2\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$$

$$S = 4r^2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$S = \frac{abc}{4}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

۱۵۷- اگر در مثلثی $b-c = 2c$ باشد صحت روابط ذیل را ثابت کنید

$$\cot\frac{B-A}{c} = \frac{4R\sin B}{2R-B} \quad , \quad \cos(A+\frac{C}{2}) = 2\cos\frac{C}{2}$$

۱۵۸- اگر α و β و γ بترتیب مساوی منصف الزوایای داخلی زوایای A و B و C و α' و β' و γ' منصف الزوایای خارجی این زوایا باشند ثابت کنید

$$\frac{\cos\frac{A}{2}}{\alpha} + \frac{\cos\frac{B}{2}}{\beta} + \frac{\cos\frac{C}{2}}{\gamma} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

$$\frac{\sin\frac{A}{2}}{\alpha'} + \frac{\sin\frac{B}{2}}{\beta'} = \frac{\sin\frac{C}{2}}{\gamma'} \quad (\text{بفرض } a > b > c)$$

۱۵۹- اگر اضلاع a و b و c (بفرض $a > b > c$) جمل متوالیه تصاعدی حسابی باشند ثابت کنید که اولاً $\cot\frac{A}{2}$ و $\cot\frac{B}{2}$ و $\cot\frac{C}{2}$ نیز جمل متوالیه تصاعد حسابی خواهند بود ثانیاً $\frac{1}{2} = \sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{C}{2}$ ،

$$ac = 4R^2$$

۱۶۰- در مثلث ABC بیاز AM مساوی ضلع AB است اولاً صحت روابط ذیل را ثابت کنید $\sin^2 B = 3\sin^2 C$ و $\sin A = 2\sin(B-C)$

ثانیاً اگر در این مثلث زاویه A معلوم باشد سایر زوایا را حساب کنید

۱۶۱- در مثلث متساوی الساقین ABC مطلوبست محاسبه طول OO' (O مرکز دایره محیطیه و O' مرکز دایره محاطه داخلی مثلث است) برحسب ضلع a

۱۶۲- مطلوبست حل و بحث اجزاء مثلث متساوی الساقین ABC (AB=AC) با معلومات:

R , ℓ_a — R , ℓ'_a

h , $a+b=\ell$ — a , نصف آزاویه داخلی (B) $\widehat{MN}$

h , r_f — A , S

مطلوبست حل و بحث اجزاء مثلثی غیر مشخص با معلومات

۱۶۲ - زوایا و یک ارتفاع

۱۶۳ - زوایا و یک میانه

۱۶۴ - زوایا و مجموع $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\ell$

۱۶۵ - a , A , h_a

۱۶۶ - ارتفاعات — ۱۶۷ - میانه‌ها

۱۶۸ - A , a , r

۱۶۹ - A , h_a , r_f

۱۷۰ - a , $b-c=d$, $R-c=\alpha$

۱۷۱ - h_a , $b-c=d$, $R-c=\alpha$

۱۷۲ - A , r_f , r

۱۷۳ - a , A , α , نصف این زاویه

۱۷۴ - a , h_a , $b+c=\ell$

۱۷۵ - a , S , نسبت $\frac{b}{c}=m$

۱۷۶ - a , S , $b+c=\ell$

۱۷۷ - a , R , $b+c=\ell$

۱۷۸ - h_a , m_a , (a با) , $b+c=\ell$

۱۷۹ - A , m_a , S

۱۸۰ - A , a , $b^2+c^2=K^2$

۱۸۱ - A , α , (نصف آزاویه وارد از رأس A) , m_a

۱۸۲ - a , m_a , $C-B=\gamma$

۱۸۳ - a , A , $b^2-c^2=K^2$

۱۸۴ - h_a , m_b , m_c

۱۸۵ - A , R , $b^2-c^2=K^2$

۱۸۶ - در مثلث متساوی الساقین ABC قاعده a و منصف آزاویه یکی از زوایای مجاور بقاعده معلوم است مطلوبست اولاً محاسبه نصف زوایای مجاور بقاعده و ثانیاً پس از بحث مسئله دستورات حاصله را قابل محاسبه لگاریتمی نمائید

۱۸۷ - اگر اشعه دوایر محاطه خارجی مثلث ABC جزء جمل متوالیه تصاعدی حسابی باشند و a ضلع وسط باشد اولاً ثابت کنید که $2\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}$ ثانیاً اگر زاویه A معلوم باشد سایر زوایا را حساب نموده بحث کنید

۱۸۸ - در مثلث ABC ارتفاع وارد از رأس A مساوی مجموع ارتفاعات دیگر است اولاً ثابت کنید که $\frac{1}{h_A}=\frac{1}{h_B}+\frac{1}{h_C}$ ثانیاً بفرض معلوم بودن A و a مثلث را حل و بحث کنید

PDF.tarikhema.org

۱۸۹- در مثلث ABC شعاع دایره محیطی R و R' اشعه دوایر محاطیه داخلی و خارجی زاویه A معلوم است اولاً $\frac{R'}{R}$ و فاصله خط المرکزین R و R' را تعیین کنید ثانیاً بدین وسیله مثلث را رسم نمائید

۱۹۰- در مثلث ABC ارتفاع AH نصف ضلع BC میباشد اولاً رابطه بین طول زوایای B و C تعیین کنید ثانیاً اگر زاویه A معلوم باشد زوایای B و C را حساب نموده بحث کنید ثانیاً مطلوبست محاسبه $\sin\frac{A}{2}$ و $\sin\frac{B}{2}$ و $\sin\frac{C}{2}$ در صورتیکه $B=2C$ باشد

۱۹۱- مطلوبست حل و بحث اجزاء مثلثی که از آن ضلع a و زاویه A و $m^2=(b-c)^2+h_a^2$ معلوم باشد (h_a ارتفاع وارد از رأس A است)

۱۹۲- اگر در مثلث ABC نقطه D موقع ارتفاع AD و نقطه H محل تقاطع سه ارتفاع و $\frac{AH}{AD}=m$ باشد (m عددی است مثبت یا منفی برحسب اینکه دو نقطه H و D در یکطرف A و یا در طرفین آن واقع شوند) اولاً صحت رابطه ذیل را اثبات کنید $\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C=\frac{1}{1-m}$ ثانیاً بفرض معلوم بودن زاویه A سایر زوایا را معلوم نموده بازاء مقادیر m بحث کنید

۱۹۳- در مثلث ABC فصل زاویه B بر c یک قاعده است اگر R شعاع دایره محیطه مثلث باشد اولاً صحت روابط ذیل را اثبات کنید $b=2R\cos C$ و $c=2R\sin C$ و $a=2R\cos 2C$ و بوسیله این روابط صحت تساویهای ذیل را تحقیق کنید $b^2+c^2=4R^2$ و $b^2-c^2=2Ra$

ثانیاً اگر $a+c=2b$ اضلاع مثلث را برحسب R و ρ حساب کنید

۱۹۴- از مثلثی ارتفاع و میانه و منصف الزاویه وارد و از یک راس معلوم است اجزاء مثلث را حل و بحث کنید

۱۹۵- از مثلثی زاویه A و ضلع c نسبت $\frac{a}{m}=k$ معلوم است (m میانه وارد از راس A میباشد) اولاً مطلوبست حل و بحث اجزاء مثلث ثانیاً اضلاع را بوسیله دستورات قابل محاسبه لگاریتمی حساب کنید

۱۹۶- در مثلث ABC اگر $2b\neq c$ و $\frac{m_b}{m_c}=\frac{c}{2b}$ باشد اولاً صحت روابط ذیل را اثبات کنید $2b^2+c^2=3a^2$ و $S=\frac{a^2}{4}\operatorname{tg}A$

ثانیاً بفرض معلوم بودن a و $S=\frac{ma^2}{4}$ زوایای مثلث را حساب کنید

۱۹۷- در مثلث ABC نقطه O مرکز دایره محاطیه داخلی است اگر $OA^2=OB\cdot OC$ باشد اولاً صحت رابطه ذیل را تحقیق کنید $\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\sin^2\frac{A}{2}$ ثانیاً بفرض معلوم بودن زاویه A سایر زوایای مثلث را حساب نموده بحث کنید

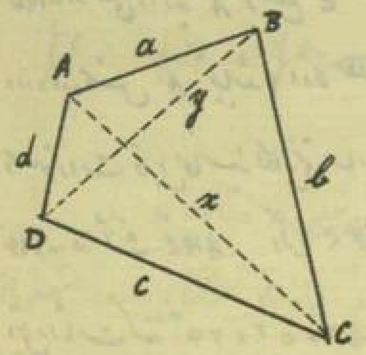
۱۹۸- اگر در مثلث ABC میانه‌های اضلاع b و c برهم عمود باشند چه رابطه بین اضلاع برقرار است ثانیاً مطلوبست محاسبه اضلاع b و c در صورتیکه ضلع a و زاویه A معلوم بوده و میانه‌های اضلاع b و c برهم عمود باشند

PDF.tarikhema.org

فصل نهم - چهارضلعیهای محدب

۷۷ - در چهارضلعی محدب ABCD زوایارا به $\hat{A}$ و $\hat{B}$ و $\hat{C}$ و $\hat{D}$ و اضلاع را به a و b و c و d میخوانیم بموارد این رابطه بین زوایا برقرار است

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D} = 360^\circ$$ (هندسه)



هر چهارضلعی محدب دارای ۸ جزء (چهار زاویه و چهار ضلع) که باجزاء اصلیه موسوم میباشد و بطور کلی با پنج جزء از این هشت جزء مشروط براینکه دو جزء آن ضلع باشد میتوان چهارضلعی را رسم نموده اجزاء مجهوله را بوسیله ترسیم اندازه گرفت و نیز ممکن است اجزاء مجهوله بوسیله دستوراتیکه در مبحث حل و بحث اجزاء مثلث ذکر کردیم حساب نمود بدینطریق که اقطار دو اربعة الاضلاع را رسم نموده مثلثات را تجزیه میکنیم چون این اقطار را به x و y نمایش دهیم حل و بحث اجزاء چهارضلعی بحل و بحث اجزاء مثلث منجر میشود چنانکه از مسئله ذیل معلوم میشود

مسئله - از چهارضلعی محدب ABCD اضلاع و زاویه $\hat{A}$ معلوم است مطلوبست محاسبهٔ سه زاویه دیگر

چون قطر $BD=y$ را مجهول فرعی فرض کنیم اولاً میتوان اجزاء مثلث ABD را که دو ضلع a و d و زاویه بینهای آن ($\hat{A}$) معلوم است حساب نمود (حالت دوم کلاسیک)، در نتیجه قطر y و زوایای ABD و ADB معلوم میشود ثانیاً میتوان اجزاء مثلث BCD را بدست آورد زیرا سه ضلع آن معلوم است (حالت چهارم کلاسیک) بنابراین زاویه $\hat{C}$ و زوایای DBC و BDC معلوم میشود لذا $\hat{B} = ABD + DBC$ و $\hat{D} = ADB + BDC$

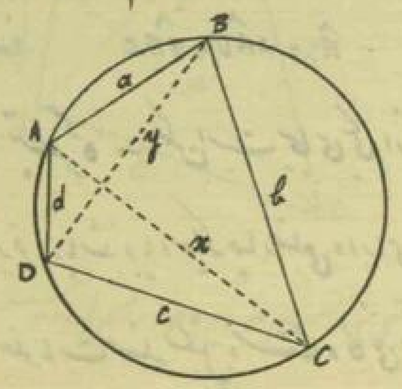
تبصره - ممکن است بجای یکی از اجزاء معلوم چهارضلعی رابطه بین اجزاء آن برقرار باشد و یا اینکه چهارضلعی دارای خاصیت مخصوصی باشد این شرایط بخصوص با معلومات مسئله تشکیل دستگاه کاملی میدهد که از حل آن مجهولات تعیین میشود مثلاً اگر چهارضلعی محیطی باشد این رابطه بین اضلاع آن برقرار است $a+c=b+d$ (هندسه) و یا اگر دور رابطهٔ الاضلاع محاطی باشد این رابطه بین زوایا حاصل میشود $A+C=B+D=180^\circ$ (هندسه) و یا اگر در چهارضلعی ABCD اقطار برهم عمود باشند نتیجه میشود $a^2+c^2=b^2+d^2$ (از قضیهٔ فیثاغورث) در این قبیل چهارضلعی ها دانستن چهار جزء لازم برای حل و بحث اجزاء آن کافیست من باب مثال

مسئلهٔ ذیل را حل میکنیم

مسئله — در چهارضلعی محاطی اضلاع معلوم است مطلوبست محاسبهٔ زوایا و مساحت و اقطار و شعاع دایرهٔ محیطیهٔ آن

اولاً محاسبهٔ زوایا — چون چهارضلعی محاطی است لذا $A+C = B+D = 180^\circ$

برای محاسبهٔ زاویهٔ A و در نتیجه زاویهٔ C قطر $y = BD$ را رسم میکنیم لذا روابط ذیل حاصل میشود



(۱) $y^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos A$

(۲) $y^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos C$

و چون زوایای A و C مکمل یکدیگرند لذا

$\cos C = -\cos A$ از مقایسهٔ روابط (۱)

و (۲) نتیجه میشود $a^2 + d^2 - 2ad\cos A = b^2 + c^2 + 2bc\cos A$

که از آن رابطهٔ ذیل بدست میآید $\cos A = \dfrac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}$

این دستور قابل محاسبهٔ لگاریتمی نیست میتوان آنرا بطریقه ذیل قابل محاسبه نمود

$$2\cos^2\frac{A}{2} = 1+\cos A = \frac{(a+d)^2-(b-c)^2}{2(bc+ad)}$$

$$2\sin^2\frac{A}{2} = 1-\cos A = \frac{(b+c)^2-(a-d)^2}{2(bc+ad)}$$

و چون محیط چهارضلعی را مساوی $2p$ فرض کنیم روابط فوق چنین میشوند

$$2\cos^2\frac{A}{2} = \frac{(a+d+b-c)(a+d-b+c)}{2(ad+bc)}$$

و یا

$$2\sin^2\frac{A}{2} = \frac{(a+b+c-d)(b+c-a+d)}{2(ad+bc)}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{ad+bc}}$$

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{ad+bc}}$$

از تقسیم این دو تساوی حاصل میشود $\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}}$

بوسیلهٔ این دستور که قابل محاسبهٔ لگاریتمی است زاویهٔ A و از رابطهٔ $C = 180^\circ - A$ زاویهٔ C بدست میآید بهمین طریق زاویهٔ B را نیز نیتوان تعیین نمود

$$\tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-a)}{(p-c)(p-d)}}$$

و لذا $D = 180^\circ - B$

بحث — چون هریک از زوایای چهارضلعی محصور بین صفر و ۱۸۰ درجه است بنابراین نصف آنها بین صفر و ۹۰ درجه واقع بوده و ظل نصفشان میتواند جمیع مقادیر

مسئله را دوارا گردد بطوریکه شرط امکان مسئله آنست که مقادیر زیر را دیکالها مثبت باشند یعنی

$$(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) > 0$$

و یا $(a+b+c+d)(b+c+d-a)(a+c+d-b)(a+b+d-c)(a+b+c-d) > 0$

حال اگر یکی از اضلاع مثلاً a را ضلع اعظم فرض کنیم سه عامل آخر نامساوی فوق مثبت و بنابراین شرط امکان مسئله مثبت بودن عامل اول است یعنی

$b+c+d-a > 0$ که از آن نتیجه میشود $a < b+c+d$

یعنی برای اینکه مسئله ممکن باشد باید ضلع اعظم کوچکتر از مجموع اضلاع دیگر باشد

ثانیاً مساحت — مساحت چهارضلعی فوق عبارتست از مجموع مساحات دو مثلث ABD و BDC یعنی:

$$S = \frac{1}{2} ad \sin A + \frac{1}{2} bc \sin C \quad (ad+bc)\sin\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}$$

که چون بجای $\sin\frac{A}{2}$ و $\cos\frac{C}{2}$ مقادیر شانرا برحسب اضلاع قرار دهیم حاصل میشود

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

ثالثاً محاسبهٔ اقطار — چون در رابطه (۱) بجای CA مساویش $\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(bc+ad)}$ را گذاریم نتیجه میشود

$$\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc} = \frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)} \quad ad \quad = a^2+d^2-2ad$$

و از آنجا

$$y = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}$$

و بهمین طریق معلوم میشود که $x = \sqrt{\frac{(bc+ad)(ac+bd)}{ab+cd}}$

از ضرب این دو رابطه حاصل میشود $xy = ac + bd$ یعنی در چهارضلعی محاطی مستطیل دو قطر مساوی مجموع مستطیلات اضلاع مقابل است (قضیهٔ بطلمیوس) اگر روابط x و y را بر هم تقسیم کنیم نتیجه میشود $\frac{x}{y} = \frac{ad+bc}{ab+cd}$

یعنی در هر چهارضلعی محاطی نسبت دو قطر یکدیگر مثل نسبت مجموع حاصلضرب‌های اضلاعی است که بطرفین قطر منتهی شده‌اند

رابعاً شعاع دایرهٔ محیطیه — اگر R را شعاع دایرهٔ محیطیه چهارضلعی فرض کنیم چون این دایره بر مثلث ABD نیز محیطیه است لذا $2R = \frac{y}{\sin A}$ و یا $2R = \frac{y}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$ و چون بجای y و $\sin\frac{A}{2}$ و $\cos\frac{A}{2}$ مقادیر شانرا

برحسب اضلاع قرار دهیم بسهولت معلوم میشود :

$$R = \frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{4S}$$

تمرینات

۱۹۹- مطلوبست حل و بحث اجزاء چهارضلعی محاطی ABCD با معلومات

۱- a و d و A و $B = 90^\circ$

۲- a و b و c و $B = 90^\circ$

۳- زوایا و محیط و بعلاوه این چهارضلعی نیز محیطی است

۴- محیط و حاصلضرب اقطار و بعلاوه میدانیم که این چهارضلعی محیط بر دایره بشعاع 2 است

۵- سه ضلع و زاویه که اقطار با یکدیگر تشکیل داده‌اند

۶- دو ضلع متقابل و دو قطر

۲۰۰- مطلوبست حل و بحث اجزاء ذوزنقه با معلومات :

۱- یک زاویه و مساحت و بعلاوه میدانیم که در دایره بشعاع R محاط است

۲- زوایا و اقطار

۳- اقطار و مساحت ذوزنقه

۲۰۱- مطلوبست حل و بحث اجزاء چهارضلعی غیر مشخص با معلومات

۱- سه ضلع و دو زاویه طرفین ضلع چهارم

۲- اضلاع و مساحت

۳- زوایا و اقطار

۲۰۲- اگر α زاویه بین محاسهای مشترک دو دایره باشد ثابت کنید

$$\sin\alpha = \frac{2(R-R')\sqrt{RR'}}{R^2+R'^2} \qquad (R \text{ و } R')$$

اشعه این دو دایره‌اند)

۲۰۳- مطلوبست محاسبه زوایای چهارضلعی محیطی ABCD که از آن سه ضلع a و b و c و شعاع دایره محاطی (R) معلوم است در حل این مسئله دو حالت تمیز دهید برحسب اینکه نقاط تماس دایره محاطی در داخل اضلاع و یا در امتداد آنها باشد

۲۰۴- در دوزنقه متساوی الساقین BCDE که قاعده بطول آن BC است محیط بطول $2p$ و قطر BD بطول d و زاویه‌ای که این قطر با قاعده BC تشکیل میدهد α است اولاً سطح ذوزنقه و اضلاع را حساب کنید ثانیاً چه رابطه بین معلومات برقرار شود تا ذوزنقه بتواند محیط بر دایره شود

۲۰۵- در چهارضلعی محدب ABCD ضلع $AB=a$ و $BC=b$ و $CD=c$ و $AD=d$ و زوایای A و B معلوم است اولاً ضلع سوم c را حساب کنید ثانیاً چه شرایطی بین اضلاع برقرار شود تا جمیع مستطیلهای محیط بر این چهارضلعی با یکدیگر متشابه شوند

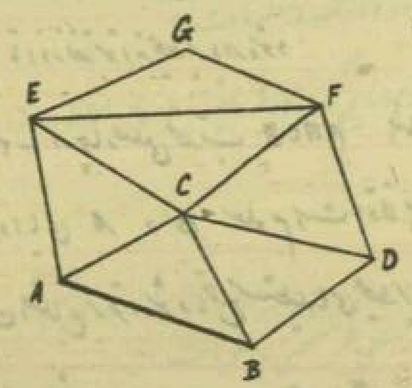
فصل دهم - موارد استعمال مثلثات در نقشه برداری

۲۰۸- در مساحی و نقشه برداری طول خطوط و مساحت اراضی و اعمال دیگر را بوسیله

آلاتی مانند زنجیر مساحی و بیرق و زاویه یاب و غیره میتوان تعیین نمود ولی برای آنکه محاسبات دقیقتر باشد غالباً یکی از خطوط را بانهایت دقت اندازه گرفته سایر خطوط شکل را بوسیله دستورات راجع بحل اجزاء مثلث حساب میکنند

نقشه برداری — برداشتن نقشه قطعه زمینی عبارت از رسم شکلی متشابه با آن بر صفحه کاغذ است نسبت تشابه را مقیاس نامند واضح است که قطعات زمین همیشه افقی نیستند ولی در ترسیمات عموماً تصاویر آنها را بر سطح افقی تصور نقشه در میاورند

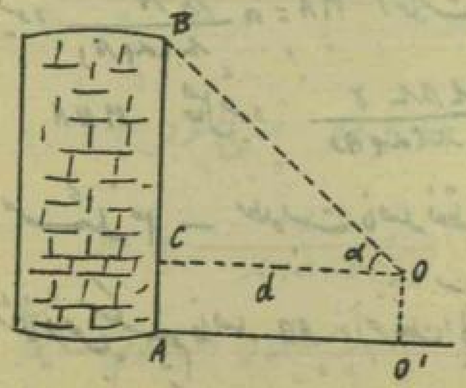
قاعدهٔ کلی برای برداشتن نقشه قطعه زمینی چنین است در روی زمین مزبور نقاط مشخصه مانند A و B و ... را قسمی فرض مینمائیم که از هریک از این نقاط لااقل بتوان دو نقطه دیگر را رویت نمود حال چون این نقاط را بخطوطی خیالی بیکدیگر وصل کنیم تصویر شکل بر سطح افق تجزیه بمثلثاتی میشود که بسهولت میتوان اجزاء این مثلثات را اندازه گرفت بنظر یکه در شکل مزبور ضلعی مانند AB را قسمی انتخاب میکنیم که ممکن الوصول و نسبتاً مسطح باشد در خصوص این قطعه خط را با دقتی کامل اندازه میگیریم برای تمام خطوط شکل فقط اندازه گرفتن همین یک ضلع



کافی است زیرا اگر در مثلث ABC زوایای A و B را اندازه بگیریم بنابر دستورات حالت اول کلاسیک دو ضلع BC و AC تعیین میشود و لذا بوسیله اندازه گرفتن دو زاویه B و C از مثلث BCD را میتوان سایر اجزاء این مثلث را حساب نمود بهمین طریق مثلثات CAF و CEF وغیره را میتوان حل نمود این عمل را مثلث بندی Triangulation نامند

در نقشه برداری علاوه برداشتن نقشه زمین عموماً مسائلی از قبیل تعیین ارتفاع یک نقطه از سطح زمین و یا تعیین فاصله دو نقطه غیر ممکن الوصول وغیره مورد استعمال پیدا میکند که ذیلاً حل میکنیم

مسئله ۱ — مطلوبست تعیین ارتفاع برجی که موقع ارتفاع ممکن الوصول باشد



برای تعیین ارتفاع AB زاویه یاب را بر نقطه O گذارده زاویه $\widehat{COB} = \alpha$ را اندازه میگیریم و بهمین فاصله $OC = d$ که موازی سطح افق است با زنجیر مساحی حساب میکنیم لذا در مثلث قائم الزاویه

PDF.tarikhema.org

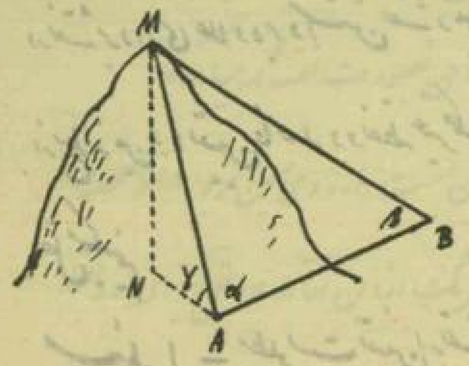
$BC = d + a$ یا $BC = \alpha + d$ این تساوی حاصل است BOC

و چون برای تعیین مقدار ارتفاع زاویه یا α یعنی OO' را بیفزائیم ارتفاع برج بدست میآید.

مسئله ۲ – مطلوبست تعیین ارتفاع کوه یا برجی که موقع ارتفاع غیر ممکن الوصول باشد

فرض میکنیم مقصود اندازه ارتفاع MN باشد در سطح افق دو نقطه A و B را فرض نموده

فاصله $AB = a$ و زوایای



$MAB = \alpha$ و $ABM = \beta$

و $MAN = \gamma$ را اندازه میگیریم

در نتیجه از مثلث ABM

میشود $MA = a \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ (حالت اول کلاسیک) و از مثلث قائم الزاویه

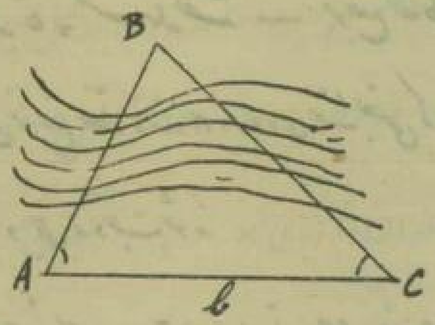
MNA حاصل میشود $MN = MA \sin\gamma = a \frac{\sin\beta \sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta)}$

مسئله ۳ – مطلوبست فاصله نقطه A از نقطه غیر ممکن الوصول B

مثلاً فرض میکنیم فاصله AB را جریان آبی قطع نموده باشد برای تعیین فاصله AB

نقطه ممکن الوصول دیگر C را اختیار نموده فاصله $AC = b$ و زوایای C و A

را اندازه میگیریم لذا فاصله AB از این



رابطه بدست میآید $\frac{AB}{\sin C} = \frac{b}{\sin(A+C)}$

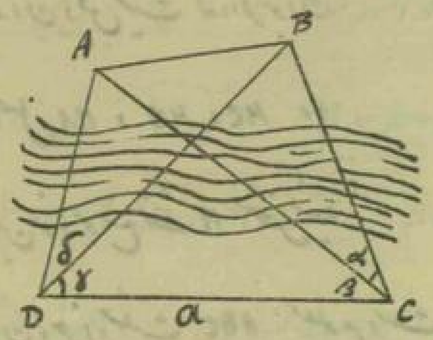
و لذا $AB = \frac{b \sin C}{\sin(A+C)}$

مسئله ۴ – مطلوبست تعیین فاصله

دو نقطه غیر ممکن الوصول

مثلاً فرض میکنیم بین ناظر و نقاط A و B جریان آب موجود باشد دو نقطه

ممکن الوصول C و D را انتخاب نموده



طول $CD = a$ و زوایای $ACB = \delta$ و

$ACD = \beta$ و $BDC = \gamma$

و $ADB = \delta$ را اندازه میگیریم در اینصورت

از حل مثلثات ACB و ADC ضلع BC و AC تعیین میشود :

$$AC = \frac{a \sin(\gamma+\delta)}{\sin(\beta+\gamma+\delta)} \quad , \quad BC = \frac{a \sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}$$

و لذا در مثلث ABC دو ضلع AC و BC و زاویه بینهای α معلوم است میتوان

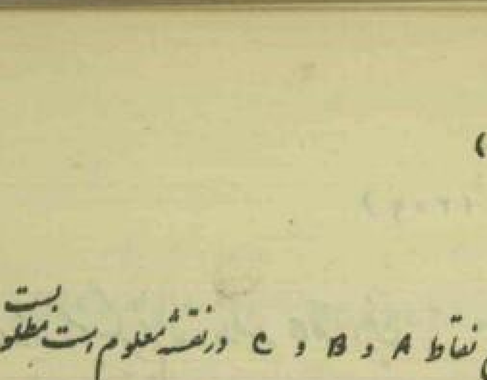
ضلع سوم AB را حساب نمود (حالت دوم کلاسیک)

PDF.tarikhema.org

مسئله ۵ ـ مسئلهٔ نقشه ـ موضع نقاط A و B و C در نقشه معلوم است مطلوب تعیین موضع نقطه مانند H بر روی نقشه بقسمی که از این نقطه طولهای AC و BC بزوایای α و β رؤیت شوند

حل هندسی ـ چون بر اوتار AB و AC بترتیب قوسهای حاوی زوایای α و β رسم کنیم محل تقاطع این دو قوس جواب مسئله و نقطه H خواهد بود

حل مثلثاتی ـ طریقه هندسی فوق چندان دقیق نیست لذا اگر بتوان فواصل HA و HB و HC را



تعیین نمود موضع نقطه H مشخص میشود

چون اجزاء مثلث ABC معلوم است لذا کافی است که زوایای $z = \widehat{MBA}$ و $\gamma = \widehat{MCA}$ تعیین شود در اینصورت از حل مثلثات MAB و MCA (حالت اول کلاسیک) فواصل مزبوره معلوم میشوند

برای تعیین زوایای z و y میتوان چنین نوشت $x + y + A + \beta + \gamma = 360$

و نیز از مثلثات MAB و MAC روابط ذیل نتیجه میشود $\frac{\sin x}{\sin \beta} = \frac{\sin \alpha}{c}$ و $\frac{\sin x}{AM} = \frac{\sin \gamma}{b}$

از تقسیم این دو تساوی حاصل میشود $\frac{\sin \alpha}{AM} = \frac{\sin \beta}{b}$

معادلات (۱) و (۲) تشکیل دستگاه دو معادله دو مجهولی میدهند که از حل آن میتوان زوایای x و y را تعیین نمود و چنانکه میدانیم حل این دستگاه منجر بحل معادله ذیل میشود :

$$\operatorname{tg}\frac{x-y}{2} = \frac{c\sin\beta - b\sin\gamma}{c\sin\beta + b\sin\gamma} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma+A}{2}$$

از این معادله $\frac{x-y}{2}$ و از رابطه $\frac{\beta+\gamma+A}{2} - 180 = \frac{x+y}{2}$ (۴)

قوس $\frac{x+y}{2}$ بدست میاید و لذا بسهولت x و y تعیین میشود

شرط امکان مسئله آنستکه $\beta + \gamma + A < 360$ باشد

متصرکه ـ اگر $\beta + \gamma + A = 180$ باشد در اینصورت $\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}$ مبهم و لذا نقطه H غیر مشخص میشود زیرا در اینصورت تساوی (۱) چنین میشود

$180 = x + y$ (۵) یعنی x و y مکمل و لذا $\sin x = \sin y$

و از آنجا تساوی (۲) چنین میشود $b\sin\gamma = c\sin\beta$ پس رابطهٔ (۳) بصورت مبهم $0 = 0$ در میاید برای تعیین نقطه H از رابطهٔ (۵) معلوم میشود که چهار ضلعی BMCA محاطی بوده و نقطه H بر محیط دایرهٔ محیطیهٔ مثلث ABC واقع است

پس معلوم میشود که در اینحالت بخصوص نقطه M خارج مثلث ABC واقع میباشد

ولی اینحال بهیچوقت دو عمل انطباق نمیافتد

تمرینات

۲۰۶- ناظری از پای برجی بفاصله ۵۰ متر واقع است در تحت چه زاویه این برج را رؤیت میکند در صورتیکه ارتفاع برج ۳۵ متر بوده و فاصله چشم ناظر از سطح افق ۱٫۲۵ متر باشد

۲۰۷- برای اندازه گرفتن فاصله نقطه A از نقطه غیر ممکن الوصول C خط AB عمود بر AC و زاویه رؤیت ABC اندازه گرفته شده است ۷۵٫۲۲ = AC

۱۲ ۱۷ تا ۳۵ = ABC مطلوبست تعیین فاصله

۲۰۸- ناظری از یک ساحل رودخانه درختی را که در ساحل دیگر واقع است و فاصله اش از ناظر مساوی عرض رودخانه نمیباشد بزاویه ۵۰ درجه رؤیت میکند اگر ۴۰ متر از ساحل دور شود این زاویه رؤیت ۳۰ درجه میشود مطلوبست محاسبه طول درخت و عرض رودخانه

۲۰۹- ناظری بفاصله ۲۰ متر از پای ستونی که بر انتهای آن مجسمه قرار داده اند واقع است ارتفاع ستون و مجسمه بر روهم ۳۰ متر باشد مطلوبست تعیین ارتفاع مجسمه در صورتیکه برای این ناظر زاویه رؤیت مجسمه نصف زاویه رؤیت ستون باشد

۲۱۰- بربالای برج قائمی برقی قائم نصب است ناظری بفاصله d از پای برج واقع شده و برج و برق را بزوایای α و β رؤیت میکند مطلوبست تعیین ارتفاع برج و برق

۲۰۷- زاویه رؤیت برجی ۴ درجه است چون ناظر بیک کیلومتر برج نزدیک میشود این زاویه رؤیت ۵ درجه میشود مطلوبست محاسبه ارتفاع برج و فاصله ناظر از پای برج

۲۰۸- از سه نقطه A و B و C واقع بر سطح افق بالن S دیده میشود اگر زوایای قائمی که بین شعاع بصر هریک از این نقاط با سطح افق تشکیل میشود بترتیب α و β و γ باشد مطلوبست ارتفاع بالن از سطح افقی که بر این سه نقطه گذشته و در حالت خاص α = β = γ = ۲۵° ارتفاع بالن را تعیین کنید

۲۰۹- از نقطه C انتهای برجی دو نقطه A و B واقع در سطح افق بزاویه ACB = α رؤیت میشود مطلوبست اولا تعیین زاویه که تصویر قائم زاویه α بر سطح افق باشد در صورتیکه ارتفاع برج و زوایای β و γ بترتیب حادث بین اشعه بصر CA و CB با قائم نقطه C معلوم است ثانیا دستوراتی حاصله را قابل محاسبه نمایید

۲۱۰- بر انتهای برجی بارتفاع a برقی بطول b قائما نصب شده است مطلوبست تعیین موضع ناظری واقع در سطح افقی که از پای برج میگذرد تا اولا برق را بزاویه معلوم α رؤیت کند ثانیا درخت بزرگترین زاویه ممکنه بر قرار بسازد

۲۱۱- ناظری از قسمت کوهی نقطه C را که بر دایره افق او واقع است در تحت زاویه α حادث بین شعاع بصر و قائم نقطه C رؤیت میکند مطلوبست تعیین ارتفاع کوه در صورتیکه شعاع زمین معلوم باشد

مسائل مختلفه

۲۱۲- مربع ABCD بضلع a مفروض است بر راس A مستقیم AE که در داخل

مربع مرور نموده رسم شده است چون مربع حول این خط دوران کند اولاً ثابت کنید که سطح حاصل از دوران محیط مربع و حجم حاصل از دوران سطح مربع ترتیب مساوی حاصلضرب محیط و سطح مربع و محیط دایره بمرکز o و شعاع oo' است (نقطه o مرکز مربع و نقطه o' تصویر آن بر خط AH است) ثانیاً زاویه $BAH = z$ را طوری تعیین کنید که سطح شکل حاصل از دوران محیط مربع معادل سطح جانبی استوانه بشعاع قاعده a و ارتفاع b شود ثالثاً بوجه هندسی مسئله را حل و بحث کنید

۲۱۳- مثلث متساوی الاضلاع ABC بضلع a مفروض است از نقطه غیر مشخص M واقع بر ضلع AC بین دو نقطه A و C عمود PNQ را بر ضلع BC فرود میآوریم نقطه Q موقع عمود و نقطه P محل تقاطع آن با امتداد AB است اولاً طول $AM = x$ را طوری تعیین کنید که $NB = K.MP$ شود ثانیاً شرط امکان مسئله چیست ثالثاً بوجه هندسی مسئله را حل و بحث کنید

۲۱۴- بر ربع دایره AOB بشعاع R دو مماس BC و AC رسم شده و نقطه غیر مشخص M بر قوس AB واقع است بفرض زاویه $MCB = \alpha$ و $MOB = \varphi$ اولاً صحت رابطه $Q(\alpha+\varphi) = \sqrt{2}\,Q(\frac{\pi}{4}+\alpha)$ را تحقیق کنید ثانیاً بفرض معلوم بودن α زاویه φ را تعیین نمائید ثالثاً بازاء دو مقدار $\alpha = \frac{\pi}{12}$ و $\alpha = \frac{\pi}{5}$ زاویه φ را حساب کنید

۲۱۵- قطاع AOB بشعاع R و زاویه مرکزی α بین صفر و π مفروض است از نقطه غیر مشخص M واقع بر قوس قطاع دو عمود MP و MQ را بر دو شعاع OA و OB

فرود میآوریم اولاً زاویه $MOA = x$ را طوری تعیین کنید که مجموع دو عمود MP و MQ مساوی طول معین a شود ثانیاً بوجه هندسی مسئله را حل و بحث کنید ثالثاً بازاء $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ و $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ زاویه x را حساب کنید

۲۱۶- نیم دایره بقطر $AB = 2R$ مفروض است بر امتداد قطر نقطه C بفاصله $AC = d$ و بر محیط نیم دایره نقطه غیر مشخص M واقع است اگر زاویه MAB را مساوی x فرض کنیم اولاً زاویه x را طوری تعیین کنید که MC واسطه هندسی بین قطعات MA و MB شود ثانیاً مسئله را بحث نموده بازاء و اگر نیم d زاویه x را حساب کنید ثالثاً بوجه هندسی مسئله را حل و بحث نمائید

۲۱۷- نقطه A در داخل زاویه قائمه xOy بفاصله $OA = a$ واقع است از این نقطه عمود CAB بر خط OA اخراج شده و نقاط B و C بترتیب محل تقاطع آن با ضلعین Ox و Oy میباشد بفرض زاویه $xOA = \varphi$ اولاً زاویه φ را طوری تعیین کنید که محیط مثلث BOC مساوی ma شود ثانیاً بازاء چه مقادیری از m مسئله دارای جواب است ثالثاً بوجه هندسی مسئله را حل و بحث کنید

۲۱۸- کنج سه وجهی قائمه $Oxyz$ مفروض است بر مرکز O راسش کنج دایره بشعاع معلوم R واقع در وجه xOy رسم شده و از نقطه I واقع بر ضلع Ox بفاصله $OI = d$ خط IA در وجه xOz قسمی مرور نموده که با ضلع Oz زاویه α را تشکیل داده مطلوبست تعیین نقطه M واقع بر محیط دایره O بقسمی که فاصله اش از خط IA ماکزیمم شود

۲۱۹- در مثلث قائم الزاویه ABC وتر را بحرف a و ضلعین زاویه قائمه را بحروف

PDF.tarikhema.org

h_a و c ارتفاع وارد بر وتر را بحرف h_a میگیریم اولاً بفرض معلوم بودن a مطلوبست محاسبه h_a و c درصورتیکه $b+c=2mh_a+a$ (m نمایش عددی است مثبت) ثانیاً حل این سیستم بنحو جبری معادل $\lambda x+\mu x=\frac{1}{m}-1$ میشود اگر $\log a$ و $\log m$ در دست باشند مطلوبست محاسبهٔ h_a و c و h_a بوسیلهٔ دستورهای قابل محاسبهٔ لگاریتمی

۲۲۰- در مثلث قائم‌الزاویه ABC (A قائمه در راس A) ارتفاع وارد بر وتر بطول $AH=h_a$ و میانه ضلع AC بطول $BM=m$ معلوم است اولاً طول قطعاتی از وتر را که ارتفاع h_a تقسیم نموده تعیین کنید ثانیاً بازاء چه مقادیر $\frac{m}{h_a}$ مسئله دارای جواب است ثالثاً اگر $\frac{m}{h_a}=\sqrt{\frac{12}{11}}$ باشد بدون رجوع بحد اول لگاریتمی اجزاء مثلث را حساب کنید

۲۲۱- در مثلث غیر مشخص ABC اشعهٔ دوایر محاطه داخلی و محاطه خارجی زاویه A را به r و r_a و ارتفاع وارد بر ضلع a را به h_a میسنجیم اولاً صحت روابط ذیل را تحقیق کنید

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{a}{r_a}\quad,\quad \operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{a}{r}$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{r}{r_a}\quad,\quad \frac{1}{r}-\frac{1}{r_a}=\frac{2}{h_a}$$

ثانیاً اگر زاویه A قائمه بوده و r و r_a معلوم باشند مطلوبست محاسبهٔ زوایای B و C و بحث بازاء مقادیر مثبته $\frac{r}{r_a}$ و بهمین محاسبه اضلاع مثلث برحسب مقادیر r و r_a و دستورات حاصله را قابل محاسبهٔ لگاریتمی نمائید و بازاء ماکزیمم نسبت $\frac{r}{r_a}$

اضلاع این مثلث را برحسب r حساب کنید ثالثاً با معلومات r و r_a بوجه هندسی مثلث قائم‌الزاویه ABC را رسم نموده بحث کنید

۲۲۲- در مثلث ABC نقاط B_1 و C_1 بترتیب محل تقاطع منصف الزوایای B و C با اضلاع AC و AB میباشد و همچنین نقاط B_2 و C_2 محل تقاطع منصف الزوایای خارجی B و C با همین اضلاع است مطلوبست محاسبه زوایای B و C درصورتیکه اولاً ضلع a و زاویه A و حاصلضرب $BB_1\times CC_1=ma^2$ معلوم باشد (m عددی است مثبت) ثانیاً a و A و $BB_2\times CC_2=ma^2$

۲۲۳- در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC نقطه O مرکز دایره محیطیه آن و $2a$ طول اضلاع این مثلث است از نقطه M بفاصله $OM=a$ و زاویه $\angle OM=15^\circ$ عمودهای MP و MQ و MR را بر اضلاع فرود آورده‌ایم اولاً طول این عمودها را برحسب a و α و β تعیین نموده ثابت کنید که اگر نقطه M در داخل مثلث باشد مجموع این عمودها مقداری است ثابت ثانیاً مساحت مثلث PQR را تعیین نموده معلوم کنید بازاء چه مقدار α این سطح مساوی صفر میشود ثالثاً اضلاع مثلث PQR را حساب نموده و بدین وسیله شعاع دایره محیطیه آن را حساب کنید

۲۲۴- مخروطی که مولدش SA بمحورش Sz زاویه α تشکیل داده و بیضی C که قطعاتش a و b است مفروض میدانیم که میتوان صفحه قاطعی فرض نمود که متقاطع با مخروط Sz بیضی C را مفروض شود اولاً اگر AB فصل مشترک این صفحه قاطع با یکی از مقاطع محوری که بر این صفحه عمود است باشد ثابت کنید که $SA\times SB=\frac{b^2}{\sin^2\alpha}$ ثانیاً مطلوبست

PDF.tarikhema.org

محاسبه زاویه SAB وطول SA وبالاخره سطح مثلث SAB برحسب

a و α و β

۲۲۵- در مثلث ABC ضلع a معلوم است ونقطه D که محل تقاطع منصف الزاویه داخلی A باضلع a است بین نقطه o ونقطه ضلع a ودر انتهای c بفاصله $oD = d$ قرار گرفته است اولاً در صورتیکه زاویه B معلوم باشد ضلع $BA = c$ را حساب نموده بحث کنید در بحث این مسئله معلوم میشود که وقتی مسئله دارای جواب است که زاویه B کوچکتر از زاویه α باشد بازاء $d = \frac{a}{4}$ زاویه α را حساب کنید ثانیاً اگر ضلع c معلوم باشد زاویه B را تعیین نموده بحث کنید

۲۲۶- در مثلث ABC ضلع a وزاویه A معلوم است برضلع a بین B ودر انتهای B و c نقطه I بفاصله $BI = d$ واقع است اولاً اگر نقطه I محل تماس دایره محاطیهٔ داخلی باشد شعاع دایره را حساب کنید ثانیاً اگر نقطه I موقع تماس دایره محاطیه خارجی زاویه A باشد شعاع این دایره را تعیین نمائید

۲۲۷- نقطه A بفاصله a از نقطه o مرکز دایره بشعاع R واقع است ونقطه M بر محیط این دایره طوری قرار داده که زاویه $MoA = \alpha$ است چون قطع AM را رسم کنیم محیط دایره را در نقطه دیگری مانند M' قطع میکند اولاً شعاع دایره محیطیه مثلث OMM' را برحسب α و a و R حساب کنید ومعلوم نمائید بازاء چه مقداری از α این شعاع بطول $\frac{R}{2}$ است ثانیاً اگر نیم شعاع را حساب کنید ثانیاً اگر این دایره OA را در نقطه B قطع کند ثابت کنید که چون α تغییر کند این نقطه ثابت میماند ثالثاً مطلوبست محاسبه AM و A'M و $\frac{AM}{A'M}$

را بعناثابت کنید که حاصلضرب $A'M \times AM$ بستگی بمقدار α ندارد

۲۲۸- در مثلث متساوی الساقین ABC ($AB = AC$) محیط را به $2p$ وشعاع دایره محیطی را به R وشعاع دایره محاطیه داخلی را به r میخواهیم اولاً $\frac{r}{R}$ را برحسب R وزاویه A تعیین نموده تغییرات $\frac{r}{R}$ را وقتیکه R ثابت و a تغییر باشد تعیین کنید ثانیاً ثابت کنید که $r = 2R\sin\frac{A}{2}(1-\sin\frac{A}{2})$ ثالثاً مطلوبست محاسبه زاویه A در صورتیکه $r = mR$ باشد (m عددی است مثبت)

۲۲۹- دایره بشعاع R برضلعین زاویه منفرجه $xOy = \alpha$ مماس است بر نقطه o عمود oz بر صفحه این زاویه رسم شده ونقطه A بر این عمود بفاصله $oA = a$ قرار دارد برضلعین زاویه α دو نقطه M و N را طوری تعیین کنید که زاویه MAN قائمه بوده وضلع MN بر دایره مماس شود

۲۳۰- دو خط Δ و Δ' بفاصله $2a$ موازی یکدیگرند بر نقطه o واقع بر صفحه این دو خط ویک فاصله از آنها عمودی بر صفحه این دو خط اخراج شده ونقطه S بفاصله $oS = a$ بر این عمود واقع است مطلوبست تعیین دو نقطه A و B بترتیب واقع بر دو خط مفروض بقسمی که زاویه ASB قائمه بوده وزاویه مثلثه دو صفحه ASB و صفحه دو خط Δ و Δ' مساوی حاصل کرده

۲۳۱- در مثلث ABC تفاضل زوایای B-C یک قائمه است اولاً مطلوبست محاسبه زوایای این مثلث در صورتیکه $\frac{b+c}{a} = m$ (حالت خاص $m = \sqrt{2}$) ثانیاً ثابت کنید که ارتفاع وارد از رأس A مماس بر دایره محیطیه مثلث است ومحل تقاطع

H مماس بردایره ω رسم کنیم وامتداد وش دایره R را در نقاط M و N قطع کند
واز این نقاط دو مماس MP و NP را بردایره کوچک رسم نمایم ثابت کنید که نقطه P وقتی
برمحیط دایره بزرگ است که نقطه E نیز برمحیط این دایره واقع باشد

۲۳۴- نیم دایره بقطر AB=2R مفروض است نقطه O مرکز نیم دایره میباشد ونقطه C
برمحیط آن قسمی واقع است که زاویه BOC=α ازنقطه A وترغیر مشخص AP
باظرزاویه ω راتشکیل داده ومرور نموده است این وتر شعاع OC را در نقطه M قطع نموده
اولاً مطلوبست محاسبه اضلاع مثلث AOM و S مساحت چهارضلعی OMPB
وبالاخره S' مساحت سطحه حادث از دوران وتر AP حول AB ثانیاً بفرض
α=90° درجه زاویه ω راقسمی تعیین کنید که $\frac{S'}{S}=\frac{m}{4\pi}$ باشد

۲۳۵- مستطیل ABCD بابعاد AB=a و AD=b و a<b
مفروض است بردوراس متقابل A و C دوخط موازی که باضلع AB زاویه α تشکیل
داده برمرور نموده است روئس دیگر را براین دوخط تصویر میکنیم مستطیل A'B'C'D'
تشکیل میشود اگر A'B'=a' و A'D'=b' باشد اولاً ابعاد a' و b' را برحسب
a و b و α تعیین کنید ثانیاً اگر a و b و 2p' (محیط مستطیل
A'B'C'D') معلوم باشد زاویه α را حساب کنید ثالثاً برحسب a و b
و S' (سطح مستطیل A'B'C'D') زاویه α را معلوم کنید رابعاً مطلوبست محاسبه a'
و b' برحسب زاویه α و S' و 2p'

۲۳۶- درنیم دایره بقطر AB=2R ازنقطه A ونقطه O (مرکز نیم دایره) دوخط

ارتفاعات قرینه راس A نسبت بحور تقارن BC میباشد ثالثاً در این مثلث صحت رابطه
ذیل را اثبات کنید $b^2+c^2=2aR$ (R شعاع دایره محیطه مثلث است) رابعاً گروه این
مثلث قاعده BC ثابت باند مکان هندسی راس A ومحل تقاطع ارتفاعات مثلث را
معلوم کنید (مکان هندسی راس A شاخه ایست از هذلولی $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ که از راس
B میگذرد)

۲۳۲- زاویه BAC=φ وفاصله نقطه O واقع برضلع AB از ضلع AC سادی
OH=h است اولاً برضلع AC نقطه M را قسمی تعیین کنید که چون از آن عمود
MP را برضلع دیگر زاویه فرود آوریم این رابطه برقرار شود $\frac{MO^2}{MP^2}=2K$ (K طولی است
معلوم) ثانیاً در بحث این قسمت معلوم میشود که بازاء مقادیری از φ که چگونه از زاویه معین که
باید تعیین نمود مسئله دارای دو جواب M' و M'' است اگر h=1 و K=2 باشد زاویه
φ را قسمی تعیین کنید که حجم حاصل از دوران دو زنقه MM'P'P حول AB سادی
حجم مخروطی بارتفاع PP' وشعاع قاعده $\frac{\sqrt{15}}{2}$ شود

۲۳۳- دایره بشعاع ω در داخل دایره بشعاع R قسمی واقعشده که محیطش از نقطه A مرکز دایره
بزرگ R برمرور نموده است از نقطه A مماس بردایره ω رسم شده امتداد این مماس دایره
R را در نقاط B و C قطع نموده است چون در نقاط B و C دو مماس بردایره کوچک
رسم شود ومحل تلاقی این دو مماس نقطه E باشد اولاً زاویه BCE و فاصله AE را برحسب
R و ω حساب کنید ثانیاً اگر R معلوم باشد ω را قسمی بیابید که نقطه E برمحیط دایره
بزرگ واقع شود ثالثاً اگر H قرینه نقطه A نسبت بمرکز دایره کوچک باشد و از نقطه

PDF.tarikhema.org

موازی AC و OD که با قطر زاویه x را تشکیل داده اند رسم نموده است فرض میکنیم که نقاط C و D محل تقاطع این خط با محیط نیم دایره باشد اولاً زاویه x را طوری تعیین کنید که مجموع مساحات دو زنقه AODC و مثلث BCD مساوی m^2 شود پس از بحث بازاء کلیه m^2 زاویه x را حساب کنید ثانیاً زاویه x را طوری تعیین کنید که مساحت مثلث BCD مضاعف مساحت دو زنقه AODC شود و بعلاوه بازاء چه مقداری از x دو حجم حاصل از دوران مثلثات ACD و BCD حول قطر AB با یکدیگر معادل میشوند

۲۳۷ – اولاً برحسب اضلاع مثلث مطلوبست محاسبه طول منصف الزوایای خارجی و معلوم نمائید بازاء چه شرطی این سه منصف الزاویه با یکدیگر مساوی میشوند ثانیاً اگر $ab = c$ و $a + b = 1 + 2m$ باشد بفرض معلوم بودن x یا m اضلاع مثلث را حساب نموده بحث کنید بعلاوه برحسب x یا m مساحت و شعاع دایره محیطی و شعاع دایره محاطی داخلی و بالاخره حاصلضرب $\frac{a}{2} m \frac{b}{2} m$ را حساب کنید ثالثاً صحت روابط ذیل را در صورتیکه مثلث متساوی الساقین باشد تحقیق کنید

$\frac{c}{2} m^2 = m \frac{a}{2} m \frac{b}{2}$ و $\frac{m}{R} = 2 m^3 \frac{c}{2}$ رابعاً مطلوبست حل و بحث اجزاء مثلث درصورتیکه $\frac{1}{2} = \frac{c}{2} m$ باشد

۲۳۸ – در مثلث ABC این رابطه بین زوایا برقرار است $\cot A + m \cot B \cot C = 0$ (m عددی است جبری مخالف واحد) اولاً مطلوبست محاسبهٔ زوایای مثلث در صورتیکه $c = k.b$ باشد (ابتداء ظل زاویه B را تعیین کنید) و ثابت کنید که اگر $m < 0$

باشد زوایای مثلث حاده است ثانیاً مکان هندسی نقطه A را وقتیکه m ثابت و تغییر کند تعیین نمائید (این مکان هندسی بیضی یا هذلولی است بمعادله

$\left(x^2 + \frac{b^2}{1-m} = \frac{a^2}{4} \right)$

۲۳۹ – مسئله Malfatti – در مثلث ABC زوایا و شعاع دایره محاطیه داخلی معلوم است مطلوبست تعیین اشعه دوایری واقع در داخل مثلث بقسمی که دو به دو با یکدیگر و هر ضلع مثلث بر آن ضلع خارج بوده و بترتیب بر اضلاع زاویه A و B و C مماس باشند

طریقه حل – منکسر $B O_2 O_3 C$ را بر ضلع BC تصویر نموده معادله دو مجهولی برحسب y و z که اشعه دوایر O_2 و O_3 تشکیل میشود بهمین نحو از منکسرهای $BO_3 O_1 A$ و $AO_1 O_2 C$ را بترتیب بر اضلاع BA و AC تصویر کنیم دستگاهی سه مجهولی بدست میآید

۲۴۰ – در مثلث ABC زاویه A و ضلع مقابل آن یعنی a و مجموع $S = AC + 2AB$ معلوم است اولاً چون ضلع AB را به x بنامیم ثابت کنید که $(2 + 2\cos A) x^2 - 2Sx (2 + \cos A) + S^2 - a^2 = 0$

ثانیاً x تابع چه شرطی باشد تا بازاء آن بتوان مثلث را بنا نمود ثالثاً بازاء چه مقادیری از S یک یا دو مثلث جواب مسئله است رابعاً بوجه هندسی مثلث را رسم نموده بحث کنید

۲۴۰ – اضلاع a و b و c مثلثی جمل متوالیه تصاعدی عددی میباشند بفرض

$a>b>c$ اولاً رابطه بین زوایای A و C تعیین کنید و در صورتیکه زاویه B معلوم باشد این دو زاویه را حساب نموده بحث کنید ثانیاً ثابت کنید که بین φ قدر نسبت این تصاعد و ρ شعاع دایره محاطیه داخلی مثلث این رابطه برقرار است

$$\rho = \varphi^{\frac{A+C}{2}} \sin\frac{A-C}{2}$$ ثالثاً اگر $K=\frac{\varphi}{\rho}$ باشد زوایای مثلث را تعیین نموده بحث کنید و در حالت خاص $K=1$ زوایا را حساب کنید

۲۴۲ - در مثلث ABC نقطه H موقع ارتفاع وارد از رأس A است اولاً ثابت کنید که برحسب وضع نقاط B و C شرط لازم و کافی برای اینکه ارتفاع AH واسطه هندسی بین قطعات HB و HC شود آنست که زوایای B و C تابع یکی از این شرایط باشند $B\pm C=\pm\frac{\pi}{2}$ ثانیاً اگر $B-C=\frac{\pi}{2}$ و نسبت $\frac{a}{b-c}=m$ باشد زوایای مثلث را حساب نموده بحث کنید ثالثاً ثابت کنید که از رابطه $B-C=\frac{\pi}{2}$ رابطه $b^2-c^2=2aR$ نتیجه میشود (R شعاع دایره محیطیه است) و عکس آنرا تحقیق کنید رابعاً اگر رأس B و C ثابت باشد و نقطه A در سطح مثلث قسمی حرکت کند که $B-C=\frac{\pi}{2}$ مطلوبست تعیین مکان هندسی رأس A و مکان هندسی نقطه D محل تقاطع ارتفاعات مثلث

۲۴۳ - در مثلث ABC منصف الزاویه داخلی زاویه A ضلع BC را در نقطه D قطع نموده و تصاویر رئوس B و C بر این منصف الزاویه بترتیب نقاط K و H است اگر $AD=l$ و $BH=h$ و $CK=k$ و $BD=x$ و $CD=y$

باشد بفرض معلوم بودن a و l و K طول x و y را تعیین کنید و اگر نقطه D معلوم باشد بوجه هندسی مثلث را رسم نموده بحث کنید ثانیاً بفرض معلوم بودن a و h و K معادله تشکیل دهید که مجهولش یکی از خطوط مثلثاتی زاویه A باشد (بحث) ثالثاً بفرض معلوم بودن h و K و l طول قطعات AH و AK را حساب کنید

۲۴۴ - در مثلث ABC اضلاع را به a و b و c و در زوایا را به A و B و C و شعاع دایره محیطیه را به R چنانچه در برخط Ox واقع در صفحه P از نقطه O زوایای xOA' و xOB' و xOC' واقع در یکطرف Ox را بترتیب مساوی A و B و C رسم نموده قطعات $OA'=a$ و $OB'=b$ و $OC'=c$ را جدا میکنیم اولاً ثابت کنید که چهار نقطه O و A' و B' و C' بر محیط دایره مماس بر Ox واقعند ثانیاً اگر دایره محیطیه مثلث ABC ثابت و رأس A بر محیط این دایره حرکت کند و در رأس دیگر مثلث بمانند خط $B'C'$ بچه وضع قرار خواهد گرفت ثالثاً ثابت کنید که مساحت مثلث $A'B'C'$ چنین است

$$S=\frac{R}{2}\left[\sin^2(A-B)+\sin^2(B-C)+\sin^2(C-A)\right]$$

رابعاً اگر زاویه A قائمه و ضلع a ثابت باشد زوایای B و C را وقتی که مساحت مثلث $A'B'C'$ ماکزیمم است حساب کنید

۲۴۵ - در مثلث ABC و $\alpha\beta\gamma$ قائمه در رئوس A و α مفروضند

مثلث abc متشابه با مثلث $\alpha\beta\gamma$ را فعلی فرض میکنیم که محاط در مثلث ABC بوده و راس قائمه a بر وتر BC واقع باشد اولاً اگر اندازه bc معلوم باشد بطریقه هندسی مثلث abc را رسم کنید ثانیاً بر حسب زاویه φ که ضلع bc با BC تشکیل میدهد مطلوبست تعیین مقدار K^2 نسبت مساحات دو مثلث abc و $\alpha\beta\gamma$ در حالات مختلفه که ممکن است اتفاق افتد بحث کنید و نیز صحت این رابطه را برای تمام حالات تحقیق کنید

$$K^2 = \frac{AB^2 \cdot \sin^2 B}{\quad} \times \frac{1}{\sin^2(B-(\varphi+2))}$$

ثالثاً اگر مثلث $\alpha\beta\gamma$ معلوم باشد نسبت نیم سطح مثلث abc را تعیین کنید

۲۴۶- در مثلث ABC مجموع $h_b + h_c = l$ و تفاضل $b - c = d$ و ضلع $BC = a$ معلوم‌اند اولاً معادله تشکیل دهید که ریشه‌اش زاویه A باشد این معادله را ممکن است بمعادله تبدیل کنید که ریشه‌اش $\frac{A}{2}$ باشد ثانیاً اگر a و d پارامتر ثابت باشند با معلومات سابق در مسئله بحث نموده معلوم کنید چند مثلث جواب است ثالثاً از دو راس B و C خطوط BD و CE را بموازات منصف الزاویه خارجی A رسم نموده (D بر ضلع AC و E بر امتداد ضلع AB واقع است) مطلوبست بر حسب l و d محاسبه مساحت دوزنقه متساوی الساقین $BDCE$ و رسم مستطیلی بقطر BC معادل آن را بعهده دانشمند طریقه ترسیمی برای رسم مثلث با دو معلوم در چه حال رسم مثلث ممکن است

۲۴۷- دو دایره S و A بمرکز مشترک O و بشعاع R و r ($R > r$) مفروضند در سطح این دو دایره دو محور Oz و Oy عمود بر یکدیگر رسم شده دایره S وتر AB

بموازات محور Oz ضلع مثلث منتظم محاطی است اگر زاویه حادث بین شعاع غیر مشخص OM دایره کوچک S با محور Oz باشد اولاً بر حسب R و r و خطوط مثلثاتی $\alpha\alpha$ مطلوبست محاسبه بر حسب فواصل MA و MB و ثابت کنید که مربع حاصلضرب $MA \times MB$ بر حسب درجه درجه‌ای است بر حسب $\alpha\alpha$ ثانیاً بازاء $R=2$ و $r=1$ مواضع نقطه M را تعیین بیابید که حاصلضرب $MA \times MB$ مساوی شود ثالثاً در حالت کلی مطلوبست تعیین موضع نقطه M بقسمی که $MA \times MB = R^2 - r^2$ و در اینحال اگر خط AM دایره کوچک را در نقطه P و دایره بزرگ را در نقطه Q قطع کند ثابت کنید که $AP = MQ = MB$ و مثلث BMQ متساوی الساقین است به پیوندید بوجه هندسی موضع نقطه M را تعیین کنید اگر نقطه C راس سوم مثلث متساوی الاضلاع ABC باشد و خط AM دایره S را در نقطه N قطع کند ثابت کنید که خط CN از نقطه P میگذرد و مثلث MNP متساوی الاضلاع است

کتبه العبد حسین میرخانی ابن مرحوم آقا سید مرتضی خوشنویس
برغانی
در مطبعه علمی طبع گردید

PDF.tarikhema.org

کتابخانه، موزه و مرکز اسناد مجلس شورای اسلامی
قبض ۱۳۰۲ هجری شمسی

PDF.tarikhema.org

PDF.tarikhema.org

کتابخانه و لوازم التحریری

مهـــــــــــران

از قبیل کتب کلاسیک - لوازم دفتری - لوازم نقاشی - لوازم مهندسی - انواع کاغذ های کارت پستال و غیره در دست رس آقایان محترم گذارده

و سفارشات را در اسرع وقت

تقدیم خواهد داد

نرسیده خیابان شاه (شهر آباد)

کتابخانه و لوازم تحریر مهران

tarikhema.org

PDF.tarikhema.org